ПО ПЪТЯ КЪМ ПЪРВАТА КОМПЮТЪРНО-ГЕНЕРИРАНА ЕНЦИКЛОПЕДИЯ

Сава Гроздев, Деко Деков

Резюме. Авторите представят създадената от тях компютърна програма „Откривател“, предназначена да открива нови теореми в областта на Евклидовата геометрия. Програмата може да се използва и за решаване на задачи за построение, задачи за доказателство, изчислителни задачи и екстремални задачи. Тя е подходяща за ученици с повишен интерес към математиката, за кръжочна работа, подготовка за олимпиади, подготовка на статии за участие в ученически състезания и други. В тази статия като възможно приложение се разглежда фрагмент от задачата за построяване на окръжностите на Малфати и се дава нов подход към тази задача. Отбелязва се, че въвеждането на „Откривател“ за първи път дава възможност за алгоритмичен подход към решаването на задачи за построение с линийка и пергел в Евклидовата геометрия.

Keywords: computer-generated mathematics, euclidean geometry, Malfatti construction problem, mathematical olympiad

„До десет години компютърът ще открие и докаже важна математическа теорема“. Такова е известното предсказание на Саймън и Нюъл (Simon & Newell, 1958), изказано през 1958 г. Сега е 2013 г., т. е. 55 години по-късно, но първата компютърна програма, която с лекота открива нови теореми в математиката, е разработена едва през 2012 г. от авторите на тази статия. Въпросната компютърна програма е наречена „Откривател“ (“Discoverer”) и е предназначена да открива нови теореми в областта на Евклидовата геометиря. Принципите, използвани при построяването на „Откриватeл“, са универсални и програмата може да служи като прототип на компютърни програми, които правят открития в различни области на науката и технологиите. „Отривател“ е в процес на разработка. Тази разработка започна в средата на 2012 г. и се планира да продължи поне до средата на 2014 г. В процеса на разработка ще бъдат създадени тестови версии. Първата тестова версия е завършена през декември 2012 г. и ще бъде използвана при тази и някои следващи статии. Компютърната програма „Откривател“ има и прототип, създаден в периода март-юни 2006 г. Прототипът откри поредица от нови теореми, които по това време са първите в света нови теореми, открити от компютър. Може да се каже, че със създаването на „Откривател“, а до голяма степен и на прототипа, предсказанието на Саймън и Нюъл е осъществено.

През последните години интересът към Евклидовата геометрия се възроди в целия свят. Това до голяма степен се дължи на масовото навлизане в училищата на програми за динамична геометрия. Тези програми позволяват да бъдат лесно визуализирани геометричните обекти, като ни освобождават от неудобното използване на традиционни пособия като хартия, линийка, пергел, траспортир. Особени адмирации заслужава компютърната програма за динамична геометрия „C.a.R“ („Compass and Ruler“), създадена от немския професор Rene Grothmann. Компютърната програма на Rene Grothmann е безплатна за ползване и може да бъде изтеглена от Интернет. Компютърната програма C.a.R е на английски език, но е преведена на редица други езици. Засега няма превод на български език, но такъв лесно може да бъде направен.

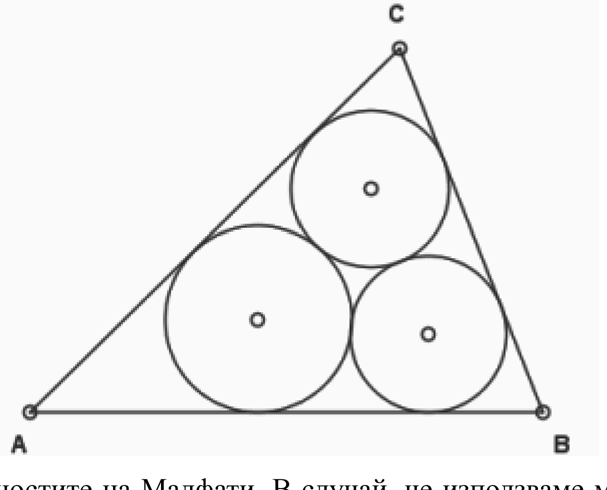
Компютърните програми за динамична геометрия позволяват с лекота да визуализирме геометрични обекти, които илюстрират геометрични теореми, а донякъде могат да служат и като инструмент за генериране на нови идеи (вж. например всъпителните бележки на статията (Гроздев&Ненков, 2010)). Тези компютърни програми обаче не са предназначени да откриват нови теореми. Същото може да се каже и за програмите за компютърна алгебра от типа на Maple и Mathematica. Програмите, които правят открития в науката, са необходими и полезни. Що се касае до „Откривател“, използването й съвместно с програма за динамична геометрия ще формира комплект, който ще позволява ефективни изследвания в Евклидовата геометрия. На този етап „Откривател“ може да бъде считана за полезна добавка към програмите за динамична геометрия. Тя обаче има по-широк обхват. „Откривател“ е базирана на принципите на изкуствения интелект (вж. например (Нильсон, 1985)) и произвежда класификационни теореми. Това означава, че компютърната програма „Откривател“ произвежда всички теореми по определена тема, като се отчита базата данни на програмата. Ако една теорема по темата не е произведена от „Откривател“, това означава, че такава теорема не съществува, т.е. съответното твърдение не е вярно. Поради тази причина тази компютърна програма е особено удобна за производство на резултати с енциклопедичен характер, а именно производство на енциклопедия по Евклидова геометрия. Това обяснява и заглавието на тази статия.

Компютърната програма „Откривател“ може да бъде използвана за откриване на нови теореми, но също така и за решаване на задачи за построение, задачи за доказателство, изчислителни задачи и екстремални задачи. Тя е предназначена както за специалисти, така и за ученици с повишен интерес към математиката, за кръжочна работа, подготовка за математически олимпиади и т.н. Особено активни ученици могат да използват компютърната програма за разработване на научни статии и статии за участие в конкурси. При работа с компютърната програма „Откривател“ ползвателите биха могли да разработят и предложат свои доказателства на част от откритите нови теореми. Особено полезен за тази цел е математическият апарат, изложен в монографията (Гроздев & Ненков, 2012).

Компютърната програма „Откривател“ е на английски език. Това е удобно за потребителя, тъй като съществуващата литература и терминологията са основно на английски език. Освен това, компютърната програма е предназначена не само за потребители от България, но трябва да бъде достъпна и за по-широк кръг лица. Потребителят с български език трябва сам да преведе съответните термини от английски на български език. Превод на компютърната програма на български език е възможен, но е оставен за бъдещето.

Задачата за построяване на окръжностите на Малфати

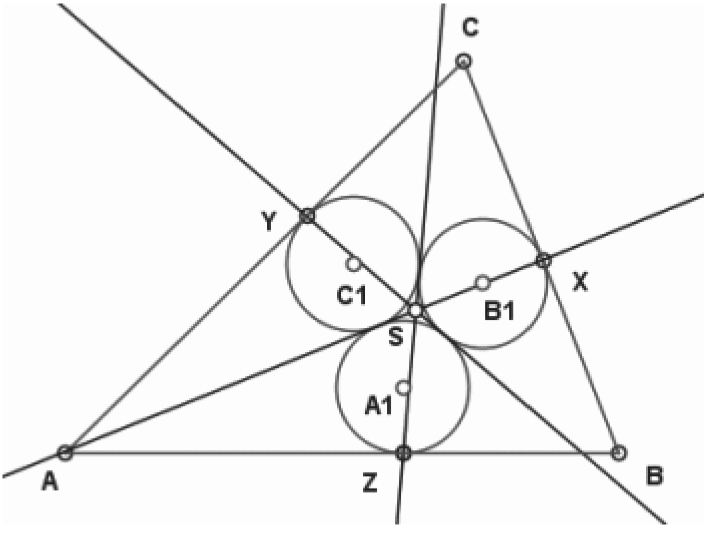
Ще илюстрираме използването на „Откривател“ при построителни задачи, като ще разгледаме фрагмент от задачата за построяване на окръжностите на Малфати. Тази задача е следната: *За даден триъгълник, като се използват само линийка и пергел, да се построят три окръжности, разположени вътре в триъгълника, всяка от които се допира външно до останалите две и се допира до две от страните на триъгълника* (вж. Фиг. 1). Задачата е формулирана през 1802–1803 г. от италианския математик Джан Франческо Малфати (1731–1807) и оттогава привлича вниманието на математиците. Подходът към решаване на задачата е алгебричен. През 1826 г. швейцарският математик Якоб Щайнер (1796–1863) предлага и син-



Фиг. 1. Окръжностите на Малфати. В случай, че използваме макрос, можем да построим тези окръжности за секунди, само като щракнем с мишката последователно върху върховете на ΔABC. След последното щракане окръжностите се появяват на екрана на C.a.R.

тетично решение. В книгата (Табов & Лазаров, 1990) са изложени решението на Щайнер и един от алгебричните подходи. В книгата (Dörrie, 1965), посветена на великите задачи на елементарната математика, задачата на Малфати е дадена под номер 30. Преглеждайки достъпната литература, констатираме, че в повечето случаи авторите се ограничават само с изложение на решението на Щайнер. Това решение остава най-краткото и най-сполучливото.

Методът на Щайнер е следният. Най-напред намираме центъра *I* на вписаната в ΔABC окръжност. За всеки от триъгълниците *BCI*, *CAI* и *ABI* построяваме съответната вписана окръжност. Да означим тези окръжности съответно с (A1), (B1) и (C1), където A1, B1 и C1 са центровете им. Точките A1, B1 и C1 са върхове на триъгълник, който ще наричаме триъгълник на de Villiers по името на южно-африканския професор по математика Майкъл де Вилиер (този триъгълник е известен и с името „триъгълник BCI“). Построяваме двете вътрешни допирателни към всяка двойка от построените окръжности. Една от допирателните за всяка двойка от построените допирателни минава през връх на триъгълника, а другата допирателна не минава през връх. Избираме допирателните, които не минават през връх на триъгълника. Трите избрани допирателни се пресичат в една точка, която



Фиг. 2. Точката *S* на Малфати-Щайнер е пресечна точка на три вътрешни допирателни. Окръжностите на Малфати са окръжностите, вписани в четириъгълниците *SYAZ*, *SZBX* и *SXCY*. (Окръжностите на Малфати не са показани на тази фигура).

ще наричаме „точка на Малфати-Щайнер“ и ще означаваме с S. Допирателните пресичат страните на ΔABC в точки, които на фиг.2 са означени с X, Y и Z. Тези точки са допирните точки на окръжностите (A1), (B1) и (C1) със страните на триъгълника. Във всеки от четириъгълниците $SYAZ$, $SZBX$ и $SXCY$ може да бъде вписана окръжност, като трите окръжности са точно окръжностите на Малфати.

При метода на Щайнер трябва да се намери точката на Малфати-Щайнер като пресечна точка на допирателни. Да се опитаме да намерим тази точка по друг начин. Ще използваме компютърната програма „Откривател“, която след съответно запитване предлага списък от възможности. Една от тях е следната:

The Malfatti-Steiner Point is the Isogonal Conjugate of the Incenter with respect to the de Villiers Triangle.

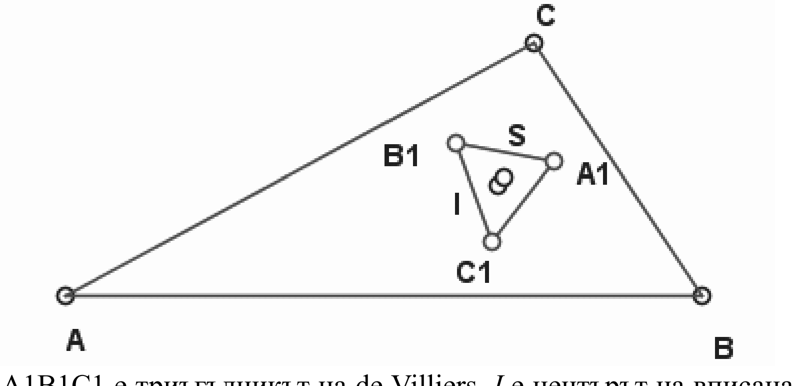
Това означава, че можем да построим точката на Малфати-Щайнер, както следва:

Намираме центъра I на вписаната окръжност на ΔABC, построяваме триъгълника на de Villiers и след това намираме точката, която е изогонално-спрегнатата на I относно триъгълника на de Villiers. Намерената точка е именно точката на Малфати-Щайнер (вж. Фиг.3).

Как може да се намери изогонално-спрегнатата на дадена точка е описано в литературата. При този подход ни трябват центровете на окръжностите (A1), (B1) и (C1), но не е необходимо да построяваме самите окръжности, както и вътрешните допирателни към тези окръжности.

Друга възможност за построяване на точката на Малфати-Щайнер е следната:

The Malfatti-Steiner Point is the Second Kenmotu Point of the de Villiers Triangle.



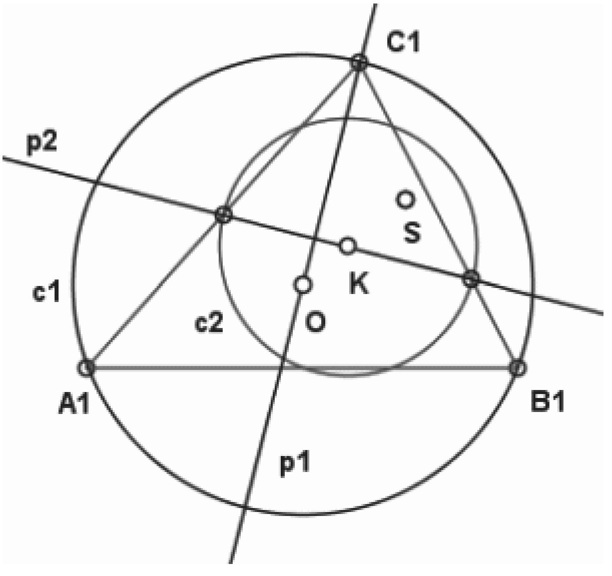
Фиг. 3. A1B1C1 е триъгълникът на de Villiers, I е центърът на вписаната окръжност в ΔABC, а S е точката на Малфати-Щайнер, която е изогонално-спрегнатата на I относно триъгълника на de Villiers.

Информация за т. нар. първа (вътрешна) и втора външна точка на Кенмоту (Kenmotu points) може да се намери в (Fukagawa & Rigby (2002)). Сега можем да намерим точката на Малфати-Щайнер по следния начин:

Построяваме триъгълника на de Villiers, като след това построяваме описаната му окръжност и втората му окръжност на Лемоан. Намираме външния център на хомотетия на тези две окръжности, която е търсената точка на Малфати-Щайнер.

Втората окръжност на Лемоан относно триъгълника на de Villiers може да се построи по няколко различни начина. Един от тях е следният:

Намираме точката *K* на Лемоан за триъгълника на de Villiers (за тази цел вж. например параграф 27 на книгата (Паскалев, 2000)). В англоезичната литература точката на Лемоан се нарича „symmedian point" (вж. (Dekov, 2008)). Нека *O* е центърът на описаната окръжност около триъгълника на de Villiers. Построяваме права p1, минаваща през *O* и връх на триъгълника на de Villiers, след което построяваме права p2 през *K*, перпендикулярна на p1. Правата p2 пресича две от страните на триъгълника на de Villiers. Втората окръжност на Лемоан е окръжността с център *K*, която минава през двете пресечни точки (вж. Фиг.4).

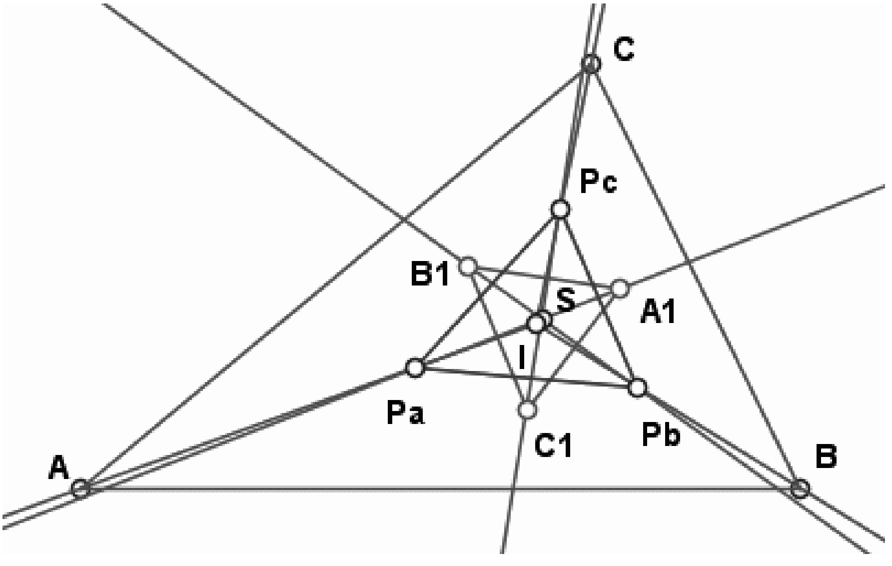


Фиг. 4. A1B1C1 е триъгълникът на de Villiers за ΔABC, c1 е описаната около триъгълника на de Villiers окръжност, c2 е втората окръжност на Лемоан за триъгълника на de Villiers, а *S* е външният център на хомотетия на окръжностите c1 и c2, който съвпада с точката на Малфати-Щайнер.

Всъщност при горния намираме втората точка на Кенмоту за триъгълника на de Villiers. Има различни подходи за построяването й, като тук сме дали един от тях.

Както и по-горе, при този подход за намиране точката на Малфати-Щайнер трябва да използваме центровете на окръжностите (A1), (B1) и (C1), но не е необходимо да построяваме тези окръжности, както и вътрешните допирателни към тях.

При подхода на Щайнер, пресечните точки на допирателните със страните на ΔABC задават точките X, Y и Z. Изглежда, че след като сме намерили точката на Малфати-Щайнер чрез някой от изложените алтернативни подходи, за построяване на окръжностите на Малфати все пак е необходимо да построим четириъгълниците $SYAZ$, $SZBX$ и $SXCY$, т. е. трябва да намерим точките X, Y и Z. Намирането на тези точки като допирни точки на окръжности с прави става чрез построяване на окръжностите (A1), (B1) и (C1). След като сме построили четириъгълниците, трябва да построим по две ъглополовящи на ъгли на тези четириъгълници, за да стане възможно пресечните точки на ъглополовящите да определят центровете на



Фиг. 5. Точка I е центърът на вписаната окръжност в ΔABC, A1B1C1 е триъгълникът на de Villiers, S е точката на Малфати-Щайнер, а PaPbPc е централният триъгълник на Малфати, т. е. триъгълникът с върхове в центровете на окръжностите на Малфати.

окръжностите на Малфати. Можем обаче да прескочим построяването на всички тези обекти, ако отчетем следния резултат на „Откривател”:

The Malfatti-Steiner Point is the Prespector of the Malfatti Central Triangle and the de Villiers Triangle.

Това означава, че можем да намерим всеки от центровете на окръжностите на Малфати като пресечна точка на две прави. Едната е правата през I и през съответния връх на ΔABC, а втората е правата през точката на Малфати-Щайнер и през съответния връх на триъгълника на de Villiers (вж. Фиг.5).

На авторите не е известно дали подходите към построяване на окръжностите на Малфати, изложени в тази статия, са нови, т. е. непубликувани досега. Евклидовата геометрия има дълга история и много от написаното е изгубено или не е достъпно. Подходът на Щайнер е един от многото към решаване на задачата на Малфати. В друга статия ще разгледаме и други подходи с използване на „Откривател“.

Задачи за читателя

Една полезна задача, която предлагаме на читателя е следната: *Да се оцени сложността на построенията при различните подходи за построяване на окръжностите на Малфати*. За целта читателят може да използва метода за оценка на сложността на построителни задачи, предложен от Борислав Лазаров и Йордан Табов (Лазаров & Табов, 1988) (вж. и (Табов & Лазаров, 1990)).

Друга полезна задача за ученици и учители е следната: *Да се докажат твърденията, изложени по-горе, като се използва методологията от книгата* (Гроздев & Ненков, 2012).

Алгоритмичен подход към решаване на построителни задачи

При разглеждане подхода на Щайнер за решаване на задачата на Малфати процедирахме, както следва:

Определяме геометрични обекти, намирането или построяването на които е необходимо за решаване на задачата (в примера по-горе такива обекти са точката на Малфати-Щайнер и централният триъгълник на Малфати). Задаваме на „Откривател“ въпроса как можем да определим съответния геометричен обект. Ако определянето изисква и други геометрични обекти, отново задаваме въпроси на „Откривател“. Възможно е да се окаже необходимост от поредица въпроси (поради тази причина прототипът на „Откривател“ беше наречен „Машина за въпроси и отговори”). Компютърната програма „Откривател“ дава изчерпателни решения в рамките на предварително дефинирана база данни. Поради тази причина можем да говорим за алгоритъм за решаване на построителни задачи:

За съответния геометричен обект задаваме въпроси и ползваме отговорите, задаваме отново въпроси и ползваме отново отговорите, и т.н. Разбира се, става дума за за алгоритъм с уточнението, че този алгоритъм зависи от базата данни на „Откривател“.

Отново подчертаваме, че решението на задачата при представения подход съществено зависи от базата данни на „Откривател“, но тя може да бъде разширявана, като авторите се надяват това да става и с помощта на читателите.

Царският път в геометрията

Легендата разказва, че цар Птолемей попитал Евклид дали има по-кратък път в геометрията от този, който геометрите предлагат. Евклид отговорил: „В геометрията няма царски път.”

Днес ние разполагаме с царски път. Ако искаме да открием нови теореми в областта на геометрията, не е необходимо да бъдем изобретателни, дори не е необходимо да мислим. Достатъчно е да щракнем с мишката и компютърът ще ни даде търсеното откритие. В зората на изкуствения интелект дълги години се водеха спорове дали компютърна програма може да победи човек при игра на шах. Тези спорове приключиха, когато компютърна програма победи световния шампион по шах. Оттогава превъзходството на компютрите непрекъснато се увеличава. В областта на откриване от компютъра на ново научно знание прогресът не е толкова забележим, което следва от факта, че понастоящем „Откривател“ е единствената работеща компютърна програма в света, която е в състояние да прави открития в науката. Авторите се надяват, че използването на компютърни програми от типа на „Откривател“ в средното училище, не само в областта на математиката, но и в областите на физиката, химията, биологията, литературата и др. ще стимулира интереса на учениците и същевременно ще им позволи да разберат по-добре възможностите на компютрите като откриватели на нови научни знания.

Компютърната програма „Откривател“ е в начална фаза на създаване. Авторите се надяват, че с помощтта на специалисти, учители и ученици възможностите на „Откривател“ ще бъдат разширявани стъпка по стъпка и съответно използвани.

Благодарности

Авторите благодарят на хората, които подкрепиха работата по темата, на първо място Bernard Gibert, St Etiene, France, Darij Grinberg, Karlsruhe, Germany, Peter J. C. Moses, Redditch, Worcs, U.K. и Rene Grothmann, Eichstatt, Germany. За изясняване на състоянието на нещата (the state of the art) в областта на създаването на компютърни програми-откриватели, съдействие оказаха редица чуждестранни специалисти, в това число Prof. Tobias Nipkow, Technical University of Munich;

Prof. Bruno Buchberger, Research Institute for Symbolic Computation, Austria; Prof. Xiao-Shan Gao, Institute of Systems Science, Beijing, Prof. Alan Bundy, University of Edinburgh, Prof. Geoff Sutcliffe, University of Miami; Prof. Dongming Wang, University of Paris VI and Beihan University, Beijing и Prof. Simon Colton, Imperial College, London. На тези хора авторите също изказват благодарност. Специална благодарност те изказват на Rene Grothmann, чиято великолепна програма за динамична геометрия C.a.R прави лесно и бързо изучаването на различни геометрични построения. С използване на C.a.R са изготвени и графиките на настоящата статия.

Вторият автор (доц. Деко Деков) изказва благодарност на хората, които са го подкрепяли по време на неговото научно развитие и на първо място, благодарност на проф. Димитър Скордев, проф. Иван Димовски, проф.Станчо Димиев, проф. Грозьо Станилов и доц. Борислав Лазаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.
2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2010). Върху един клас криви от втора степен. *Математика и математическо образование*, 2012, 306 – 312.
3. Лазаров, Б. & Табов, Й. (1988). Оценки на алгоритми за геометрични построения. *Обучението по математика и информатика*, № 6, 1–4.
4. Табов, Й. & Лазаров, Б. (1990). *Геометрични построения.* София: Народна просвета.
5. Паскалев, Г. (2000). *С координатите в геометрията*. София: Модул.
6. Нильсон, Н. (1985). *Исскуственньй интелект*. Москва: Радио и связь.
7. Dekov, D. (2008). Computer-Generated Mathematics: The Symmedian Point, *Didactical Modeling*, *Bulgarian Academy of Sciences*.
8. Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications.
9. Simon, H. & Newell, A. (1958). Heuristic problem solving: The next advance in operations research. *Operations Research*, 6(1) 1–10.
10. Fukagawa, H. & Rigby, J. F. (2002). Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18^{th} an 19^{th} Centuries. Singapore: Science Culture Technology Press.

TOWARDS THE FIRST COMPUTER-GENERATED ENCYCLOPEDIA

Abstract. The authors present their computer program „Discoverer“, intended to discover new theorems in the field of Euclidean geometry. Also, the program could be used in construction problems, to find proofs of theorems, to solve computational problems and extremal problems. It is suitable for high school students with special interest to Mathematics, for circle activities and preparation for participation in Mathematical Olympiads, for preparation of scientific papers for student competitions and others. A possible application of the computer program is considered in the present paper concerning a fragment of the problem for Malfatti circle constructions, thus proposing a new approach. It is stated that the introduction of „Discoverer“ gives for the first time a possibility for an algorithmic approach to ruler-compass construction problems in Euclidean geometry.

Sava Grozdev

✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov

✉ Associated Professor, PhD in Mathematics
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora
E-mail: ddekov1@gmail.com