ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ С ПОМОЩТА НА КОМПЮТЪРНИ ТАБЛИЦИ

Сава Гроздев, Деко Деков

Резюме. Авторите предлагат изучаването на екстремални задачи в училище да започва на по-ранен етап, например от IX клас. За решаването им може да се използва числен метод, при който с помощта на компютърна програма се чертаят графики на функции и се създават компютърни таблици. При това не е необходимо предварително познаване на производна на функция. Статията е посветена на този подход.

Keywords: extremal problem, numerical method, computer table, computer mathematics, high school.

С навлизането на компютрите в училище се появиха различни възможности за подобряване на образованието по математика чрез използването им. Това се отнася и до задачите, свързани с намиране на екстремуми на функции, които са полезни както от практическа гледна точка, така и като подходящ инструмент за изясняване и затвърждаване на изучавания учебен материал. Проблемът, който стои пред въвеждането на екстремални задачи в средното училище, е добре известен. Екстремалните задачи се изучават с помощта на производни на функции, но производните са включени в учебното съдържание едва за XII клас. Авторите предлагат една възможност за разрешаване на проблема чрез въвеждане на методи, които не изискват предварително познаване на производни. В частност, това позволява изучаването на въпросния материал да става на по-ранен етап в образованието.

Един добър числен метод за решаване на задачи за екстремуми е методът на пълното изброяване. Този метод е прост и разбираем и не изисква предварителна подготовка. Необходимите знания от страна на учениците се отнасят до понятия като числова функция и стойности на числова функция. Умение да се сравняват две числа в десетичен запис е също необходимо. Тези знания и умения би трябвало да не затрудняват учениците от девети клас. Ще отбележим, че при числените методи получаваме не точно, а приближено решение, като при това ползваме само числа в десетичен запис.

При изучаване на числови функции и при различни задачи, в които участват такива функции, особено полезни са графиките. Усвояването на умение да се чертаят графики на функции трябва да започне с чертане на графики върху хартия, след което може да се премине към използване на съответни компютърни програми. Систематичното прилагане на подходяща програма прави учебния процес значително по-ефективен. Чертането на графики на функции с помощта на компютърна програма трябва да стане навик на учениците, като към този навик постепенно трябва да се прибавят умения за приложения при решаване на различни задачи.

Една от полезните компютърни програми, които могат да бъдат използвани в училище, е компютърната програма Graph. Програмата е създадена от Ivan Johansen от Дания и е налична за изтегляне в Интернет. Тя е безплатна и е на английски език. Преведена е на различни езици, но засега няма превод на български език, макар че лесно може да бъде направен. Тази компютърна програма е специализирана за чертане на графики на числови функции и представлява лесен и удобен инструмент за тази цел. Освен отличните инструменти за чертане на графики програмата разполага и с няколко допълнителни възможности, които могат също да бъдат полезни.

Примери

По-долу ще дадем примери за решаване на екстремални задачи с метода на пълното изброяване.

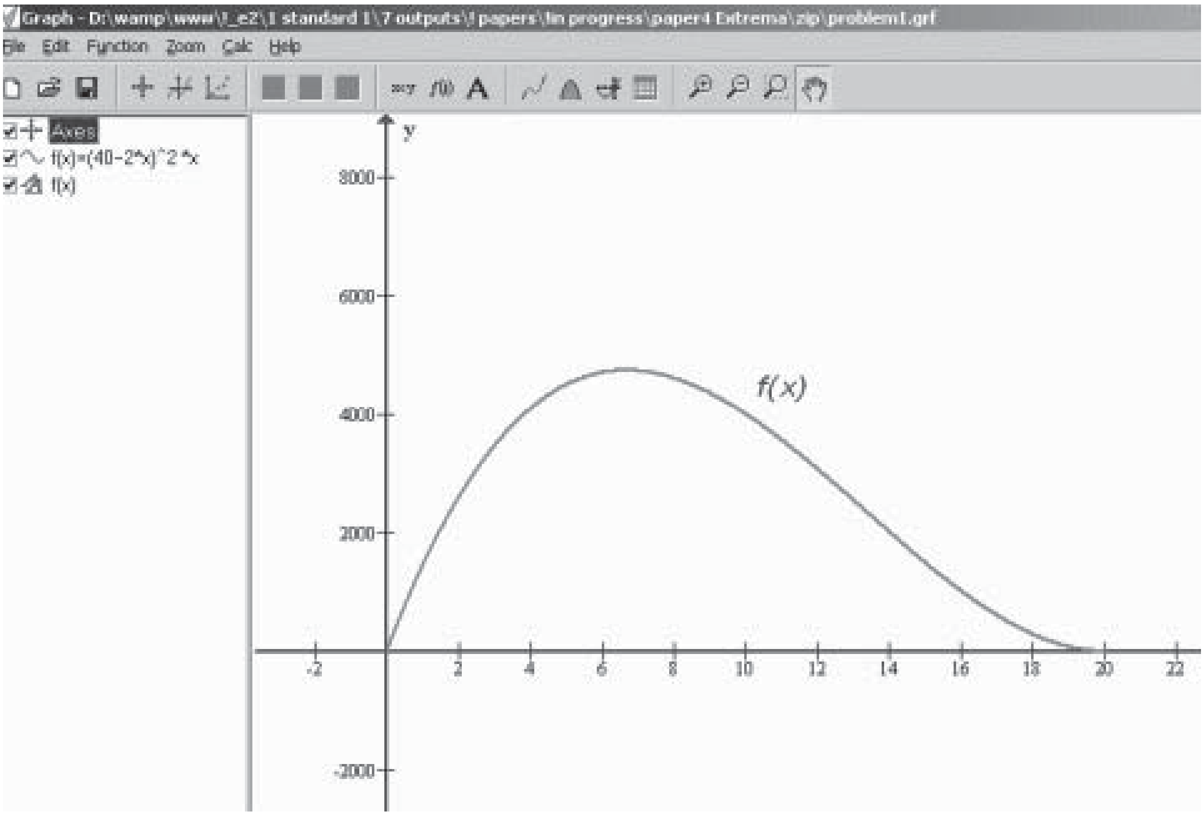
Задача 1. От картон с формата на квадрат със страна 40 см трябва да се изработи отворена отгоре кутия с възможно най-голям обем. За целта изрязваме във всеки от ъглите на картона по едно квадратче, като всички изрязани квадратчета имат еднаква дължина на страните. Каква трябва да бъде тази дължина?

Горната задача се среща в различни учебници. В учебника на Запрянов от 1991 г. на стр. 160 тя е решена с методите на математическия анализ, като е даден и чертеж. Задачата изисква учениците да знаят как се намира обем на правоъгълен паралелепипед и следователно, когато се изучава темата за обем на правоъгълен паралелепипед, тя може да бъде включена в материала. В учебниците има редица подобни задачи за лица и обеми на геометрични фигури, които могат да бъдат включени към съответните уроци.

Решение: Означаваме с x дължината на страната на изрязаните квадратчета. Тогава обемът на кутията ще бъде $f(x) = (40 - 2x)^2x$. От условието на задачата следва, че трябва да намерим най-голямата стойност на $f(x)$ в затворения интервал $[0,20]$.

Въпросът, който възниква, е с каква точност трябва да се реши задачата, имайки предвид, че евентуално точно решение няма да ни е полза. Достатъчно е да намерим дължината на страната на квадратчетата, които ще изрежем, с точност до един милиметър. Ако изрязваме с ножица, трудно бихме използвали решение с по-голяма точност. Тази бележка има принципен характер. В математическите специалности точните решения са приоритет, но в инженерни и икономически задачи се работи с числа, записани като десетични дроби с няколко верни цифри. Човек със средно образование, който на практика използва знанията си, работи предимно с числа в десетичен запис с няколко верни цифри. Затова на решаването на задачи с числени методи трябва да бъде отделено подобаващо място в средното образование.

За да решим задача 1, процедираме по следния начин. С помощта на компютърната програма „Граф“ начертаваме графиката на получената по-горе функция. Това става лесно, като запишем функцията със спазване на изискванията на „Граф“ за това. За да получим прегледна графика, можем да изберем подходящи мащаби на координатните оси и да преместим абсцисната ос *Ox*. На фиг.1 е дадена графиката на функцията *f*(*x*), начертана с помощта на компютърната програма „Граф“.



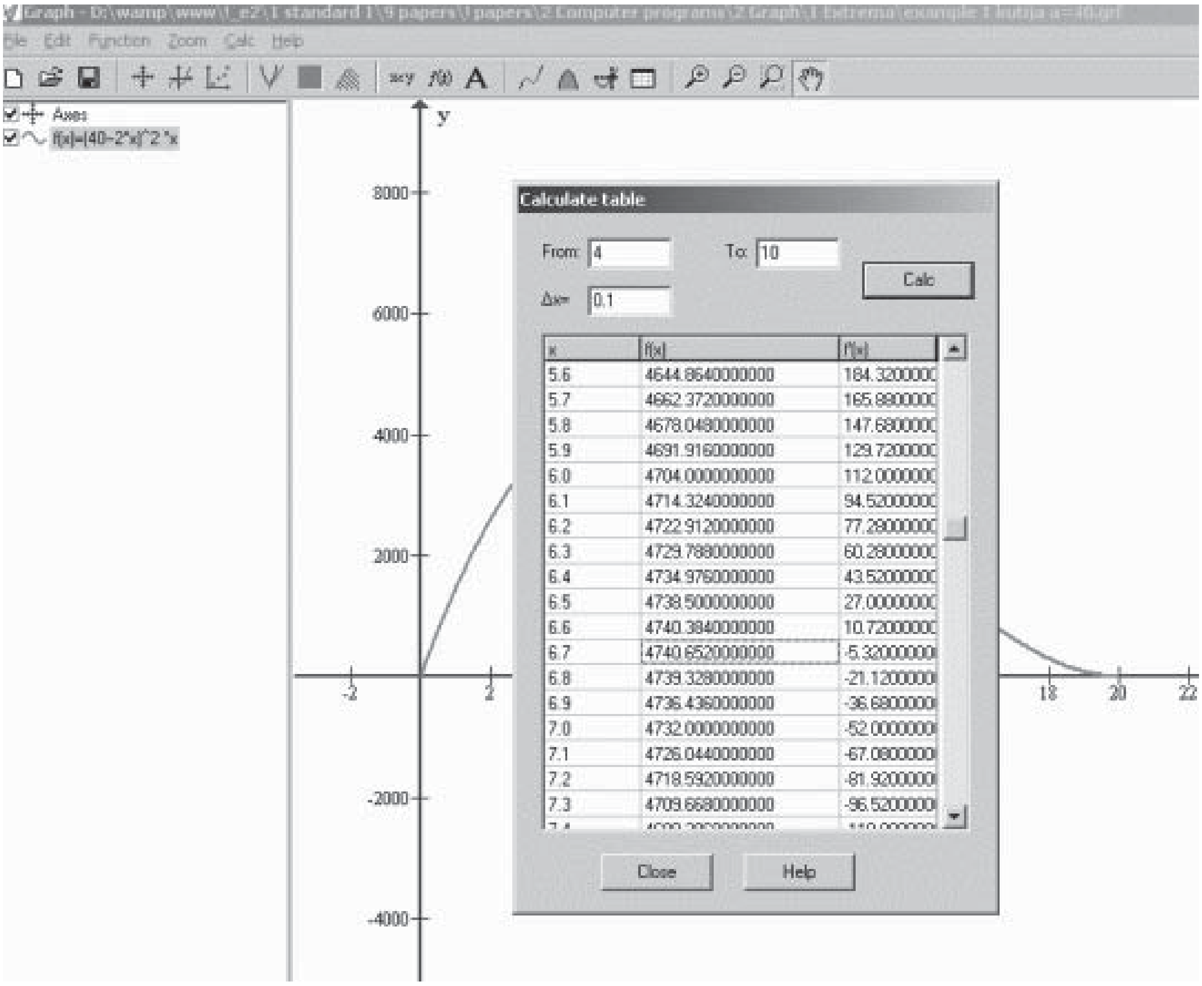
Фиг.1. Фотография на част от екрана на компютърната програма „Граф“

Можем да изберем интервал за x, в който да търсим максимума на функцията $f(x)$. Графиката на функцията помага да видим къде е максимумът на функцията $f(x)$ и да изберем възможно по-къс интервал за x. Един подходящ интервал е интервалът [4,10]. Остава да уточним стойността на x, при която функцията $f(x)$ има максимум, както и да намерим този максимум. При метода на пълното изброяване разсъждаваме така: разделяме интервала [4,10] на равни части с помощта на точките x_0, x_1, x_2,..., като в конкретния случай $x_0 = 4$. При поне една от тези стойности на x стойността на $f(x)$ ще бъде най-голяма. Приемаме тези стойности на x (ако са повече от една), както и съответната стойност на $f(x)$ за решение на задачата. При този подход е необходимо за избраните стойности на x (в случая x_0, x_1, x_2,...) да пресметнем съответните стойности на $f(x)$, а именно $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,.... По-нататък избираме най-голямата от пресметнатите стойности на $f(x)$. Пресмятанията можем да извършим на хартия или да използваме калкулатор. Една добра възможност е да се обърнем към таблицата, която предлага компютърната програма „Граф“. Тази таблица прави точно това, което ни е необходимо. За целта щракаме върху иконата за таблица и попълваме текстовите полета в диалоговия прозорец, който се появява. Самите текстови полета са следните: тъй като се интересуваме от интервала [4,10], записваме 4 в текстовото поле „от“ и 10 в текстовото поле „до“; трябва да попълним и текстовото поле „Δx“, където Δx е разликата между две стойности на x, за които ще бъде изготвена таблицата; в това текстово поле се указва точността, с която ще решим задачата; в конкретния случай сме избрали точност 0.1, което означава, че решаваме задачата с точност до един милиметър. След попълване на горните данни щракаме с мишката върху бутона „Пресметни“ (Calc) и компютърната програма попълва таблицата (вж. фиг. 2).

В диалоговия прозорец за таблица сме попълнили текстовите полета и компютърната програма е попълнила таблицата. Остава да прегледаме таблицата, да видим коя е най-голямата стойност на $f(x)$ и при каква стойност (или стойности) на x се получава тази най-голяма стойност. В конкретната ситуация се концентрираме върху следните три реда от таблицата:

6.6	4740.3840000000
6.7	4740.6520000000
6.8	4739.3280000000

В първата колона са стойностите на x, а във втората са съответните стойности на $f(x)$. Забелязваме, че функцията достига най-голяма стойност при $x = 6.7$, като тази най-голяма стойност е равна на 4740.652... В таблицата на „Граф“ има колони и за стойностите на първата и на втората производна на функцията $f(x)$, но те могат да бъдат полезни само на изучаващите диференциално смятане. Стойностите на първата производна могат да бъдат използвани например от студенти за по-лесно намиране на максимума на функцията, тъй като в колоната със стойности на първата производна трябва да се открие числото нула или число, близко до нулата, което е по-лесно от намирането на най-голямото число в колона с числа.



Фиг. 2. Фотография на част от екрана на компютърната програма „Граф“

Предлаганото решение на задачата не е точно. Точно решение получаваме при $x = 40/6 = 6.(6) = 6.66666....$, което е безкрайна периодична десетична дроб. Ако се интересуваме обаче от практическото приложение на решението на задачата, точността, с която сме решили задачата, е достатъчна.

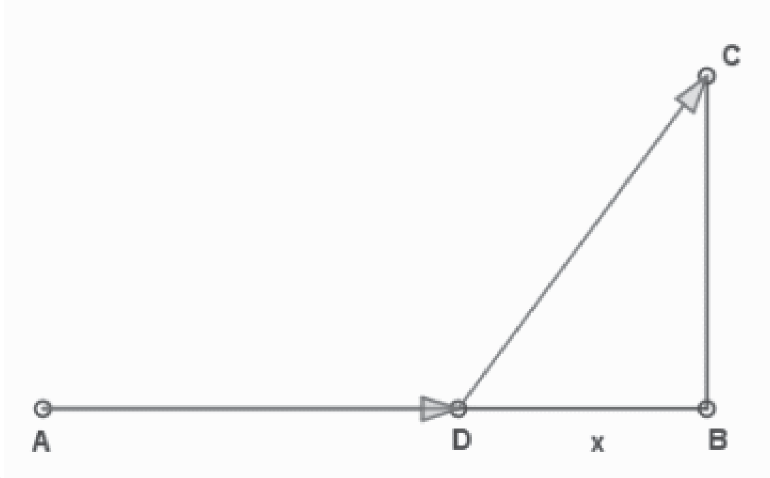
Тъй като разглежданата задача е за намиране на най-голяма стойност на функция в интервал, трябва да пресметнем стойностите на функцията и в краищата на интервала [0,20]. От графиката обаче се вижда, че стойностите на функцията в краищата на интервала са равни на 0 (това следва и от условието на задачата). Следователно можем да си спестим пресмятанията.

Един друг подход е следният. Вместо да стесняваме интервала, в който търсим максимума, можем да използваме целия интервал [0,20]. Таблицата ще бъде малко по-голяма, но при много задачи разликата е пренебрежима. Има смисъл да стесняваме интервала само ако търсим отговор с относително голяма точност, при което таблицата ще съдържа много стойности. Ще отбележим също, че за да използваме таблицата на „Граф“, е достатъчно да запишем функцията, на която търсим екстремум, като не е необходимо да чертаем прегледна графика. Самата прегледна графика изисква евентуално мащабиране на осите и тяхно преместване, поради което може да бъде пропуснато. Тези бележки се отнасят и за задачите по-долу.

Задача 2. Колоездач се намира в точка *A* на шосе и трябва да стигне в точка *C* извън него (фиг. 3). Скоростта му по шосето е 10 км/ч., а извън него е 6 км/ч. Разстоянието от *A* до *B* (по шосето) е 20 км, а разстоянието от *B* до *C* (извън шосето) е 10 км, като отсечката *AB* е перпендикулярна на отсечката *BC*. Как трябва да се движи колоездачът, за да достигне най-бързо точката *C*?

Това е също една популярна задача. Решение с използване на диференциално смятане може да бъде намерено в (Митев, 1995). Задачата е подходяща за включване в средното училище към темата за Питагоровата теорема.

Решение: Нека колоездачът се отклонява от шосето в точка *D* (вж. фиг. 3). Да означим с x дължината на отсечката *DB*. Дължината на отсечката *DC* се пресмята с помощта на Питагоровата теорема като хипотенуза при дадени два катета.



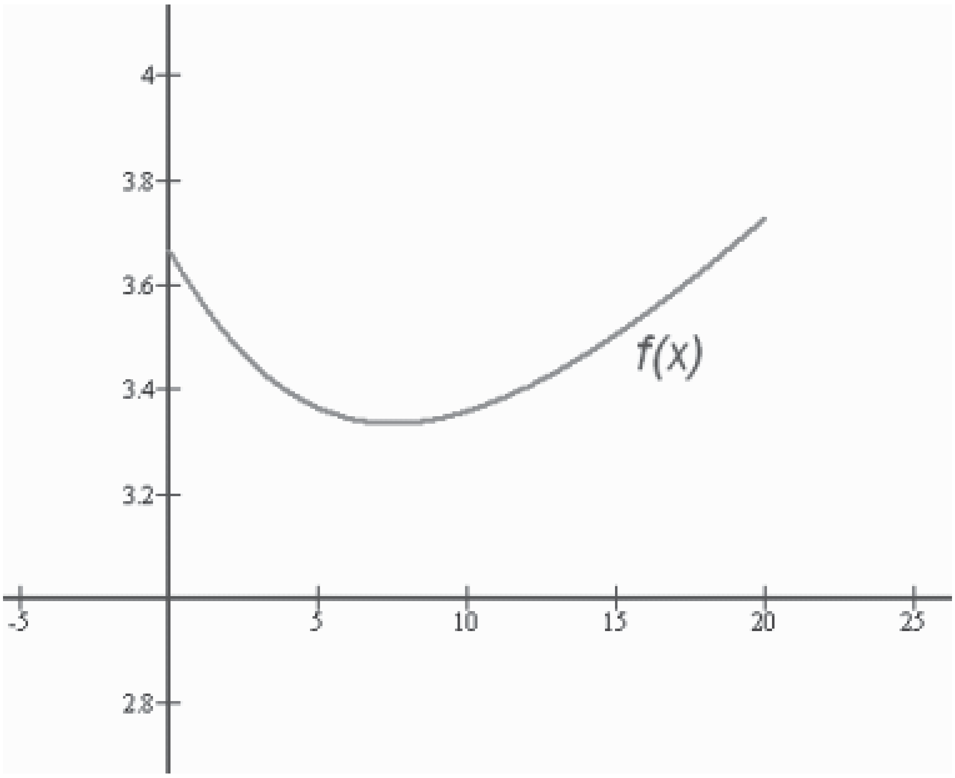
Фиг. 3. Колоездачът се движи по шосето от точка *A* до точка *D*, след което продължава до точка *C*, движейки се по отсечката *DC*.

Времето, за което колоездачът изминава път с дължина s при равномерно праволинейно движение със скорост v, е $t=\frac{s}{v}$. Решаването на задачата се свежда до намирането на най-малката стойност на функцията

$$f(x)=\frac{20-x}{10}+\frac{\sqrt{x^2+100}}{6},$$

в интервала $[0,20]$.

С каква точност трябва да решим задачата? Колоездачът трудно може да измерва разстоянието с точност до сантиметри. Допустима точност е един метър и затова приемаме да решим задачата с точност до един метър. Първо начертаваме с „Граф" графиката на функцията $f(x)$. Записваме функцията, като спазваме изискванията на компютърната програма „Граф" за запис на функция. В текстовото поле за $f(x)$ трябва да запишем (20-x)/10+sqrt(x^2+100)/6. Този запис произхожда от някои езици за програмиране, като подобен на него се изисква и при другите компютърни програми. Следователно, умението за запис така или иначе трябва да бъде усвоено. Построяваме графиката на функцията в интервала от 0 до 20 (вж. фиг. 4).



Фиг. 4. Фотография на част от екрана на „Граф".

С „Граф" сме записали графиката като графичен файл във формат png, така че тук използваме този графичен файл.

Както от условието на задачата, така и от графиката следва, че можем да търсим минимума на $f(x)$ не в целия интервал [0,20], а в по-малък интервал, например [5,10]. Точността, с която сме приели да решим задачата, е един метър, поради което полагаме $\Delta x = 0.001$. Преглеждаме таблицата на „Граф" и намираме редовете, където стойността на функцията е най-малка. Спираме се на следните редове:

7.499	3.3333333376
7.500	3.3333333333
7.501	3.3333333376

Забелязваме, че функцията $f(x)$ има минимум при $x = 7500$, като този минимум е равен на 3.3333333333. Това означава, че след като измине 12,5 км по шосето, колоездачът трябва да се отклони. Най-малкото време, за което колоездачът може да измине разстоянието от A до C, е около $3\frac{1}{3}$ часа, т.е. около 3 часа и 20 минути. Точното решение за минимума на функцията $f(x)$ е $3\frac{1}{3}$, но точността, която получаваме с таблицата, е задоволителна. Лесно може да се види, че грешката, която допускаме, е по-малка от една секунда, което е приемливо в реална ситуация.

Задача 3. Производител произвежда продукт, като разходите за производството на единица продукт са 2 лв. Производителят продава продукта при цена 5 лв. за бройка, като при тази цена успява да продаде по 4000 броя месечно. Той наблюдава пазара и констатира, че на всеки лев повишение на цената на продукта месечните продажби намаляват с по 400 бройки. Производителят желае да разбере при каква цена трябва да продава един брой от продукта така, че да има максимална печалба.

Подобна задача е от интерес за широк кръг бизнесмени, които предлагат продукти или услуги. Задачата може да има различни формулировки – за оптимизиране на цената на стая в хотел, цената на ястия в ресторант, цената на ваканция, предлагана от туристическа фирма и т.н. Както при инженерните и физическите задачи, така и при икономическите е редно да работим с числа в десетичен запис. Банките и счетоводителите работят с такива числа. Точността, която се изисква при решаване на икономически задачи, не е голяма, като освен това трябва да отчетем, че паричните суми се закръгляват до една стотинка. Следователно прекомерната точност не само че не е необходима, но и не е позволена.

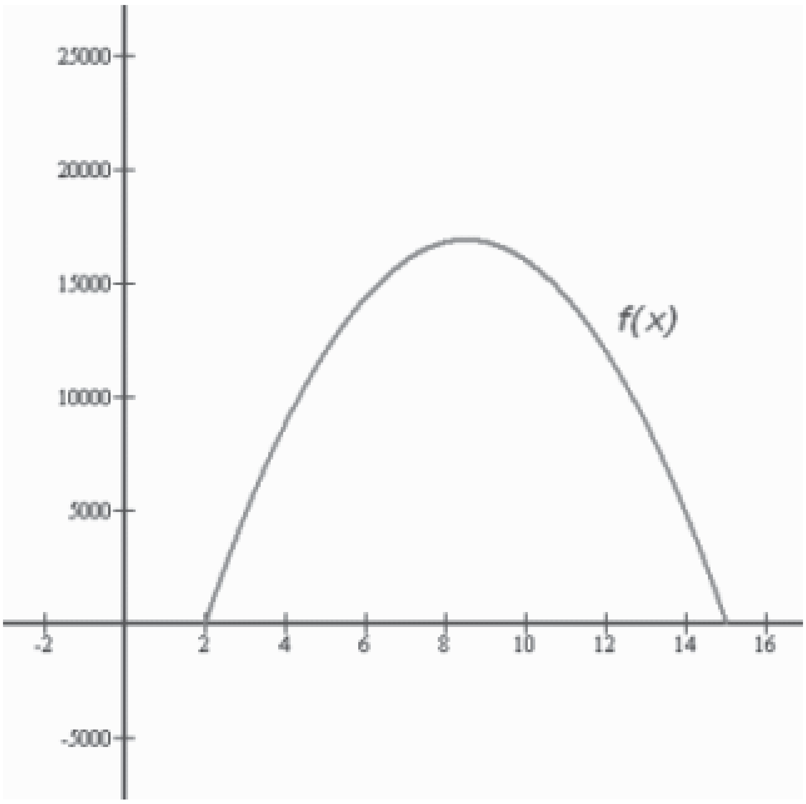
Задача 3 е от учебника Hoffmann & Bradley, 1995, като формулировката е изложена на стр. 559, където е намерена и функцията $f(x)$, най-голяма стойност на която се търси. Самото намиране на най-голямата стойност на $f(x)$ е направено на стр. 723. Авторите са изчакали, докато изложат темата за намиране на екстремуми с производни, след което се връщат към задачата. Необходимо ли е обаче да чакаме толкова, т.е. необходими ли са производни? Ще решим задачата с подхода, използван при предните две задачи.

Най-напред намираме функцията, чиято най-голяма стойност се търси. Нека x е цената, на която е продаван един брой от продукта, а n е броят на екземплярите от продукта, продавани за един месец. Тогава $n = 4000 - 400(x-5) = 400(15-x)$. Нека p е печалбата от един продаден продукт, т.е. $p = x - 2$. Тогава общата печалба е

$$f(x) = n.p = 400(15 - x)(x - 2).$$

Както и при предишните задачи, имаме ограничения. В случая задачата има смисъл за $x \in [2,15]$, тъй като при стойности на x извън този интервал производителят е на загуба. (Ако производителят продава един брой от продукта на цена, по-ниска от производствените разходи, т.е. на цена, по-малка от 2 лв, той ще е на загуба. Ако цената бъде прекомерно увеличена, производителят пак ще е на загуба, тъй като няма да има продажби: при $x > 15$ функцията има отрицателни стойности.)

С „Граф“ построяваме графиката на функцията $f(x)$ в интервала [2,15]. Графиката е дадена на фиг. 5.



Фиг. 5. Графика на функцията $f(x)$ в интервала [2,15].

За да получим прегледна графика, сме мащабирали по различен начин координатните оси. С таблицата на „Граф“ можем да търсим стойности на $f(x)$ в интервала [2,15], но бихме могли да изберем и по-къс интервал. Избираме да търсим най-голямата стойност на $f(x)$ в целия интервала [2,15]. Стигаме до въпроса с каква точност ще решаваме задачата. Самото условие на задачата подсказва точността: трябва да решим задачата с точност до една стотинка. В таблицата задаваме интервала от 2 до 15, като посочваме, че трябва да бъдат пресметнати стойностите на x през една стотинка, т.е. през 0.01 лв. В таблицата намираме следните редове:

8.49	1.689996000E+4
8.50	1.690000000E+4
8.51	1.689996000E+4

Записът на число във вида 1.690000000E+4, често именуван „научен запис“, се използва понякога в информатиката. В десетичен запис числото е 16 900. Компютърните програми ползват означения, които произхождат от езиците за програмиране, така че учениците трябва да усвоят тези означения.

От трите реда по-горе се вижда, че функцията има максимум при $x = 8{,}50$ лв., като максималната стойност е 16 900. Първоначално производителят продава един брой от продукта за 5 лв, което означава че печели месечно по 12 000 лв. Ако той продава един брой за 8,50 лв., печалбата ще бъде по-голяма с 4900 лв. месечно.

За да бъде формулирана задача 3 и решена с посочения подход, е необходимо учениците да познават полиноми и графики на полиноми. Следователно задачата може да бъде включена в тема, изучавана на по-ранен етап в средното училище. Графиката на функцията в тази задача е парабола. Ето защо един допълнителен начин за решаване е с намиране на координатите на върха на параболата (ако съответният урок е усвоен). Важно е да се отбележи, че тук точно решение може да се получи без използване на производни.

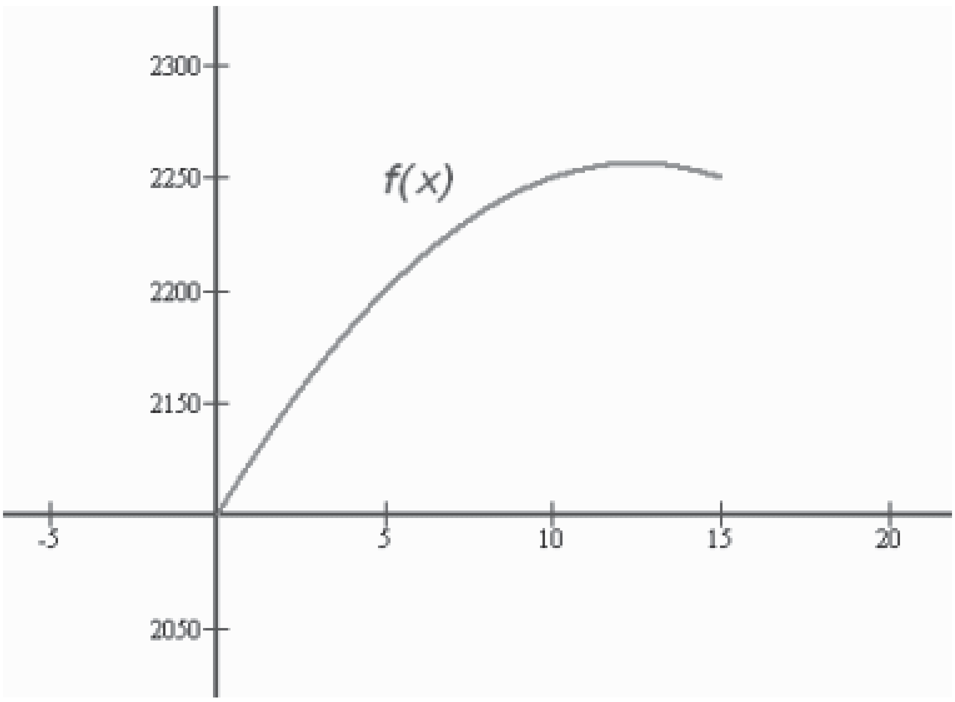
Задача 4. Туристическа фирма трябва да превози група туристи от един град до друг. Фирмата притежава автобус с 50 места. Ако групата е от 35 човека, всеки пътник трябва да плати по 60 лв. за превоза. Ако обаче групата е по-голяма, фирмата прави намаление с по един лев за всеки допълнителен пътник. Фирмата желае да разбере колко човека трябва да има в групата, така че приходът от превоза да е най-голям.

Решение: Това е задача за дискретна оптимизация. Нека x е броят на допълнителните пътници, като x е цяло число. От условието на задачата следва, че $x \in \{0,1,2,3,4,..., 15\}$. Нека n е броят на пътниците в групата, т.е. $n = 35 + x$, а p е печалбата от превоз на един пътник, т.е. $p = 60 - x$. Тогава приходът на фирмата е

$$f(x) = n.p = (35 + x)(60 - x).$$

Задачата може да се реши, като пресметнем $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$,... $f(15)$ и вземем най-голямото от тези числа. Тук броят на стойностите на $f(x)$, които трябва да се пресметнат, е относително малък, така че можем да извършим пресмятанията с калкулатор. Лесно се вижда, че $f(12) = f(13) = 2256$.

Задача 4 е от учебника Hoffmann & Bradley, 1995, стр. 733, като за решаването й е използвано диференциално смятане. Производни обаче можем да търсим само на функции, които са непрекъснати и диференцируеми, така че при този подход функцията $f(x)$ трябва да бъде разглеждана като непрекъсната функция, дефинирана в интервала [0,15]. Графиката на тази непрекъсната функция е дадена на фиг. 6. Максимумът на $f(x)$, намерен с производни, е при $x = 12.5$. Числото $f(12.5)$ обаче не е цяло. За да решим задачата, трябва да пресметнем $f(12)$ и $f(13)$ и да вземем за решение по-голямото от тези две числа. Тъй като $f(12) = f(13) = 2256$, заключаваме, че задачата има две решения.



Фиг. 6. Приемаме, че $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала [0,15].

Виждаме, че подходът с използване на производни при тази задача не дава решение. Ако разглеждаме $f(x)$ като непрекъсната функция, ще можем да използваме таблицата на „Граф“. Решението на задачата намираме от следните редове:

x	f(x)
11	2254.0000000000
12	2256.0000000000
13	2256.0000000000
14	2254.0000000000

Въпрос. Графиката на непрекъснатата функция $f(x)$ графика на парабола ли е?

Задачите за дискретна оптимизация могат да бъдат използвани при различни теми в средното училище. По-долу предлагаме още една такава задача, решението на която оставяме за читателя.

Задача 5. Сумата на две цели положителни числа е равна на 11. Каква е най-малката сума от квадратите на тези числа?

Отговор: 61.

Една компютърна програма

Таблицата на „Граф“ пресмята стойности на функция $f(x)$ при стойности на аргумента, които са в даден интервал $[a,b]$, като пресмятането започва от $x = a$ и продължава при стойности на x, които са на разстояние Δx една от друга. Вместо таблицата на „Граф“ можем да използваме малка компютърна програма, която върши същата работа. Съставянето на такава програма е полезно упражнение за всеки ученик, който би желал да усвои решаването на задачи по математика по този начин. Компютърната програма има предимството, че ни посочва и екстремалната стойност на функцията.

По-долу е предложена компютърна програма, написана на PHP, която възпроизвежда таблицата на „Граф“. Този код трябва да бъде записан в текстов файл с разширение php (Гроздев & Деков, 2013).

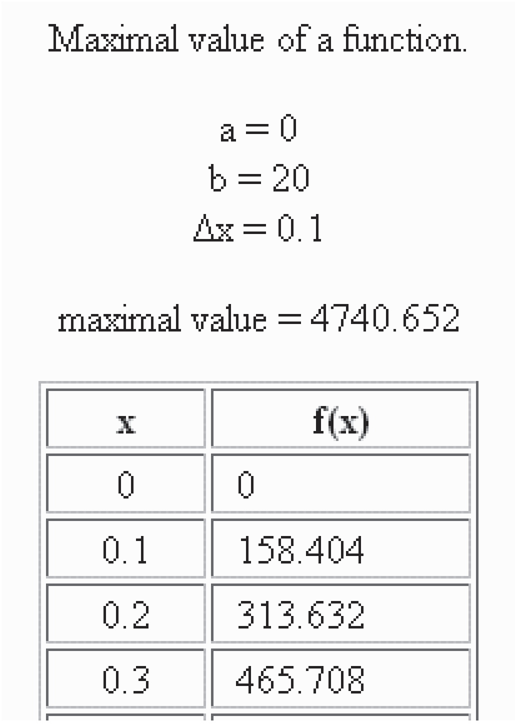
```
<?php
$a = 0;
$b = 20;
$delta = 0.1;
function f($x){return pow(40-2*$x,2)*$x;}
//================
$x = $a - $delta;
while ($x <= $b-$delta)
{
```

```
$x = round($x + $delta,8);
$A[]= f($x);
}

$B = $A;
rsort($B);
//================
echo „<center>Maximal value of a function.<p>“;
echo „a = $a<br>“;
echo „b = $b<br>“;
echo „&Delta;x = $delta<p>“;
$m = round($B[0],8);
echo „maximal value = $m<p>“;

$n = count($A);
echo „<table border=1>“;
echo „<tr><th width=60>x</th><th width=100>f(x)</th></tr>“;
for ($i = 0; $i < $n; $i++)
{
$x = $a + $i*$delta;
$A[$i] = round($A[$i],8);
echo „<tr><td align=center>$x</td><td>   $A[$i]</td></tr>“;
}
echo „</table></center>“;
?>
```

Входните данни се записват преди първата черта в кода. За всяка конкретна задача трябва да се попълнят стойностите за начало и край на интервала $[a,b]$, както и стойността на Δx. Това са стойности съответно на променливите \$a, \$b и \$delta. Записваме и функцията $f(x)$, като за целта използваме конструкцията на функция. В цитирания код сме записали данните на задача 1.

Кодът между първата и втората черта пресмята числата в таблицата, като ги подрежда в масив. Последните два реда преди втората черта служат за намиране на най-голямата от стойностите на функцията $f(x)$, които са в таблицата. За целта дефинираме масив, елементите на който са стойностите на функцията от таблицата, а вградената функция rsort() подрежда тези стойности в низходящ ред. Така, първата поред от стойностите на подредения масив е търсената най-голяма стойност.

Кодът след втората черта служи за визуализиране върху екрана на браузъра на това, което считем за нужно. Ученик, запознат с HTML, би разбрал лесно този код. Можем да отбележим, че в таблицата на „Граф“ има числа, записани с излишни нули (незначещи цифри), например числото 4740.6250000000. В нашата таблица за удобство сме премахнали излишните нули, като сме използвали вградената функция round(). На фиг. 7 е дадена фотография на част от екрана на браузъра.



Maximal value of a function.

a = 0
b = 20
Δx = 0.1

maximal value = 4740.652

x	f(x)
0	0
0.1	158.404
0.2	313.632
0.3	465.708

Фиг. 7. Фотография на част от екрана на браузъра,
в която са включени първите четири реда на таблицата

Кодът, цитиран по-горе, служи за намиране на най-голямата стойност на функция. За да намерим най-малката стойност, трябва на мястото на функцията rsort(), която подрежда елементите на един масив в низходящ ред, да запишем функцията sort(), която подрежда елементите на един масив във възходящ ред. Освен това на две места в кода трябва да заменим низа „maximal value“ с низа „minimal value“.

След стартиране на браузъра интерпретаторът на PHP изготвя файлове с резултатите. В някои случаи тези файлове могат да бъдат големи по обем, както е например при задача 2. Кодът на задача 2 е около 1 KB, но HTML-файлът, произведен от интерпретатора на PHP, е 1315 KB. В този случай, за да достигнем бързо до реда в таблицата, в който е екстремалната стойност, може да използваме инструмента за търсене на браузъра, като в полето за търсене напишем екстремалната стойност, която е посочена в началото на файла. Възможността за използване на търсачката на браузъра е допълнително предимство при използване на компютърна програма.

Кодът по-горе може да бъде модифициран по различни начини. Например може да бъдат създадени текстови полета, в които направо да се запишат данните на задачата.

За удобство на читателя във файл problems.zip са включени файловете за решаване на задачи от 1 до 5 по-горе. За всяка задача са включени по три файла – файл на „Граф“ с разширение grf с графиката на функцията, екстремум на която търсим, php-файл с кода и съответния htm-файл с отговора, произведен от интерпретатора на php. Освен това за задача 2 е включен и файлът на C.a.R. с графиката, дадена по-горе. Файловете на C.a.R. имат разширение zir. Файлът problems.zip може да бъдат изтеглен от линка:

http://azbuki.creativesolutions.bg/editions/magazines/maths/contents/problems.zip

Олимпиади по компютърна математика

Както беше отбелязано в началото, навлизането на компютрите дава нови възможности и поставя нови изисквания. След като бъде усвоен учебният материал по дадена тема чрез класическите методи и учениците овладеят решаването на задачите с помощта на химикалка и хартия, естествено идва редът на умението задачите по темата да бъдат решавани с компютър. Това ускорява процеса и освобождава време – например за добавяне на нов учебен материал. Използването на компютърни програми като част от учебния процес по математика може да се разглежда като следваща стъпка след въвеждането на калкулаторите. Естествено е то да бъде насърчено с провеждането на олимпиади по компютърна математика. В отличие от традиционните олимпиади, тези по компютърна математика ще оценяват уменията на учениците да ползват компютърни програми за решаване на задачите. Неотдавна в България беше проведена първата олимпиада за студенти по компютърна математика. Бяха зададени 30 задачи и се разрешаваше ползването на три компютърни програми. Тази инициатива е редно да бъде последвана и от регламентирането на олимпиади по компютърна математика за ученици. Подобна олимпиада има специфични изисквания. Тъй като компютрите решават задачите бързо, броят на задачите трябва да бъде по-голям от този при традиционните олимпиади – например както при студентската олимпиада 30 задачи за три часа. Необходимо е регламентиране на компютърните програми, които ще бъдат инсталирани на компютъра на всеки участник. Що се касае до компютърните програми, които са подходящи за използване в средното училище, това е дискусионен въпрос. При първата олимпиада по компютърна математика за студенти са използвани платени компютърни програми, които освен това са специализирани за решаване на задачи от висшата математика.

При учебния процес в средното училище би могъл да бъде използван комплект от подходящи безплатни компютърни програми. Въвеждането на такъв комплект в образователния процес е актуална задача. Подходящи безплатни компютърни програми са например компютърната програма за чертане на графики „Граф“ и компютърната програма за динамична геометрия C.a.R. Може да се отбележи, че използването в едно състезание на програма за динамична геометрия като C.a.R. ще даде възможност да бъдат включени и задачи за построение с линийка и пергел. Разбира се, би било добре учениците да имат възможност да ползват и подходящи платени компютърни програми, но това би могло да бъде оставено за по-следващ етап, още повече че известните платени компютърни програми невинаги са подходящи за средното образование. Освен това по-ценно би било да се произведе комплект от компютърни програми, които са съобразени с конкретните уроци по математика в българското средно училище. Такъв комплект би направил учебния процес по-ефективен. Олимпиадите по компютърна математика се естествено и необходимо допълнение към традиционните олимпиади. Бъдещето е на все по-голямото интегриране на новите технологии с учебния процес и колкото по-бързо и по-качествено е това интегриране, толкова по-ефективен би станал учебният процес.

Заключителни бележки

Имаме избор. Едната възможност е изучаването на екстремални задачи да бъде отложено за XII клас, като решаването се базира на диференциалното смятане. Друга възможност е екстремални задачи да бъдат включени към съответните теми на по-ранен етап в средното училище – например от IX клас нататък, като за целта се използва компютърна програма за чертане на графики и попълване на компютърни таблици. Трябва ли да се лишаваме от възможността учениците на ранен етап да изучават екстремални задачи към отделни теми в средното училище само за да спазим парадигмата, че екстремални задачи се решават с използване на производни? Не всички ученици, завършили средно образование, ще продължат с висше образование, а тези, които продължат, невинаги ще изучават математически анализ. Наличието на прост метод за решаване на екстремални задачи е подходящо за подобни категории хора. Що се касае до тези, които ще изучават математически анализ в университета, предлаганият метод е алтернативен подход към решаването на екстремални задачи, който може да служи например за сверяване на отговорите или за бързо решаване с помощта на числен метод. Авторите препоръчват на учителите да се стремят към обогатяване на учебния процес, като съставят екстремални задачи в допълнение към изучавания учебен материал по математика. За решаването на екстремалните задачи може да се използва простият числен метод, изложен в тази статия. Учителите могат да изпращат съставените от тях задачи до авторите на тази статия и да се консултират с тях по темата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., Д. Деков (2013). Математика с компютър. *Математика и информатика*, 56, 2, 123 – 132.
2. Запрянов, З., И. Димовски, Г. Станилов, Р. Русев, К. Коларов (1991). *Математика за XI клас*. София: Просвета.
3. Митев, Й. (1995). *Математика за географи*. София: Изд. на СУ.
4. Hoffmann, L., G. Bradley (1995). *Finite Mathematics with Calculus*. New York: McGraw Hill.

Сава Гроздев
✉ професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Деко Деков
✉ доцент, доктор по математика
ул. „Захари Княжевски“, 81
Стара Загора
E-mail: ddekov1@gmail.com

EXTREMAL PROBLEMS IN HIGH SCHOOL BY COMPUTER TABLES

Abstract. The authors propose to start the study of extremal problems in school earlier, for example from the 9^{th} grade on. A numerical method could be used for the purpose, which allows application of computer programs for graphical representation of functions and creation of computer tables. Thus, preliminary knowledge of derivatives is not necessary. The paper is dedicated to such an approach.

Sava Grozdev
✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov
✉ Associated Professor, PhD in Mathematics
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora
E-mail: ddekov1@gmail.com