НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА КОМПЮТЪРНАТА ПРОГРАМА „ОТКРИВАТЕЛ“

Сава Гроздев, Деко Деков

Резюме. Компютърната програма „Откривател“, която е в процес на разработване от авторите на тази статия, е предназначена да открива нови теореми в Евклидовата геометрия. В тази статия са дадени някои теореми, създадени от „Откривател“, и е посочено как могат да бъдат използвани.

Keywords: computer-generated mathematics, Euclidean geometry, Discoverer, mathematical olympiad

Компютърната програма „Откривател“ е в процес на разработване от авторите на Гроздев и Деков (2013). Предназначението на първата тестова версия, използвана в тази статия, е главно да бъде проверено функционирането на някои от модулите на програмата, но е възможно и производство на теореми по някои теми. Първата тестова версия произведе няколко хиляди теореми, някои от които са известни, а за други авторите предполагат, че са нови. В тази статия се предлагат някои от тях.

За да може теорема, произведена от „Откривател“, да бъде използвана в учебния процес, е необходимо твърдението на теоремата да бъде преформулирано така, че да съдържа само понятия, които се изучават в средното училище. Терминологията в „Откривател“ може да бъде намерена например във Weisstein[1], като дефиниции на всички използвани понятия са в подготовка в CGEEG[2], 2013. Преформулираните теореми могат да бъдат използвани в учебния процес – например като задачи за доказателство и задачи за построение. Могат да бъдат използвани и за самостоятелна работа, за подготовка на реферати, за подготовка за състезания и олимпиади, при работа в кръжок, при изготвяне на дипломни работи на ученици и студенти и т.н. В тази статия са дадени примери на преформулирани теореми. Теореми, открити от „Откривател“, могат да бъдат преформулирани и като задачи за изчисление, но тази тема ще бъде разгледана от авторите в друга статия.

Доказателства на нови теореми, открити от „Откривател“ и изготвени от читателя, е желателно да бъдат изпращани до авторите за преценка и популяризиране, а също така и за евентуално включване в CGEEG, 2013 или в сборник със задачи, който е планиран да бъде издаден. Читателят може да ползва различни методологии, като една препоръчителна е тази от Гроздев & Ненков (2012). Препоръчителна е и методологията от Станилов (2004) или тази, изложена в учебниците по геометрия за средното училище.

Тема 1. Ролите на една забележителна точка в различни триъгълници

Да разгледаме следните две теореми:

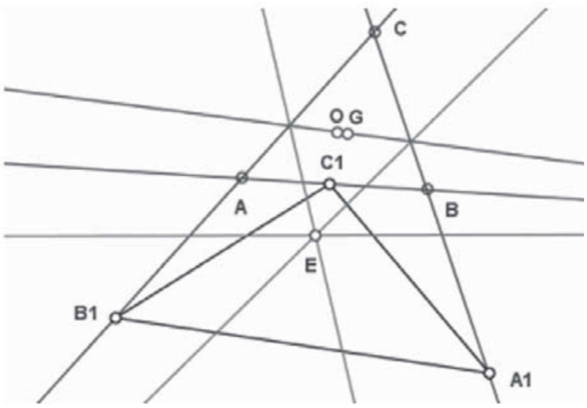
Теорема А1. (Паскалев, 2001, стр. 278)**.** Ортоцентърът на ΔABC е център на вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност, където AA_1, BB_1 и CC_1 са височините на ΔABC.

Теорема А2. (Гроздев & Ненков, 2012)**.** Точката на Лемоан на ΔABC е точка на Лемоан и на инволюционния триъгълник на ΔABC.

Общото между двете теореми е това, че една забележителна точка в ΔABC, в друг триъгълник, който е производен на ΔABC, е също забележителна, но от друг вид. В литературата има много теореми, подобни на горните две. Ще казваме, че в двата триъгълника точката има различни *роли*. Може да се отбележи, че в енциклопедията на „Откривател“ (CGEEG, 2013) би трябвало да бъдат включени роли на не по-малко от пет хиляди забележителни точки, за да може да бъдат покрити известните източници на теореми за роли на забележителни точки в триъгълници. Една забележителна точка може да има различни роли и в един и същи триъгълник. Това обаче е тема, която ще бъде разгледана в друга статия. Теореми А1 и А2, формулирани по-горе, са преоткрити от „Откривател“. По-долу са дадени и други примери. Теоремите са преформулирани като задачи за доказателство, а първите две теореми са преформулирани и като задачи за построение.

Теорема 1. The Circumcenter is the Orthocenter of the Cevian Triangle of the Euler Reflection Point.

Задача 1. Да означим с G и O съответно медицентъра и центъра на описаната окръжност за ΔABC. Докажете, че симетричните образи на правата GO относно правите BC, CA и AB се пресичат в една точка. Нека E е пресечната точка на трите прави, а A_1 е пресечната точка на правите AE и BC. Аналогично дефинираме точките B_1 и C_1. Докажете, че центърът на описаната около ΔABC окръжност е ортоцентър за $\Delta A_1B_1C_1$ (Фиг.1).



Фиг. 1

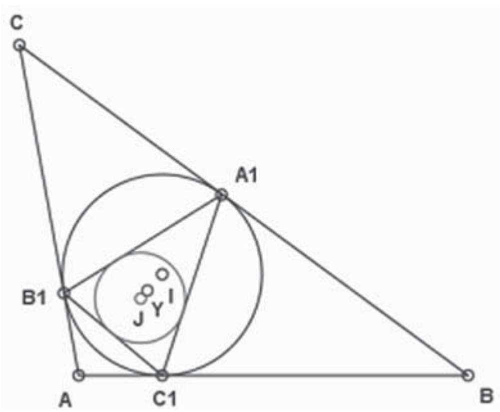
Точката E, определена в условието на задача 1, се нарича Euler Reflection Point. За този точка виж например Pohoata[3] (2010). Кимбърлин (Kimberling[4]) нарича тази точка Focus of the Kiepert Parabola.

Задача 1а. Да се построи с линийка и пергел ортоцентърът на $\Delta A_1B_1C_1$, определен в условието на задача 1.

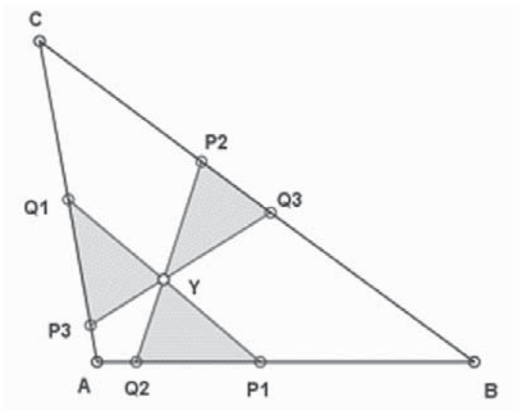
Задачата може да се реши с малък брой построения, като използваме теорема 1 и построим търсената точка като център на описаната около ΔABC окръжност.

Теорема 2. The Yff Center of Conguence is the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle wrt the Pedal Triangle of the Incenter.

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната в ΔABC окръжност, а A_1, B_1 и C_1 са допирните точки на вписаната окръжност съответно със страните BC, CA и AB. Нека Y е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжности за $\Delta A_1B_1C_1$ (Фиг. 2.). Нека правата L_A преминава през точка Y и е перпендикулярна на вътрешната ъглополовяща на $\measuredangle A$ на ΔABC, като P_1 и Q_2 са пресечните точки на L_A съответно със страните AB и AC. Аналогично определяме точките P_2 и Q_2 и точките P_3 и Q_3 (Фиг.3.). Докажете, че триъгълниците YP_2Q_3, Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви.



Фиг. 2

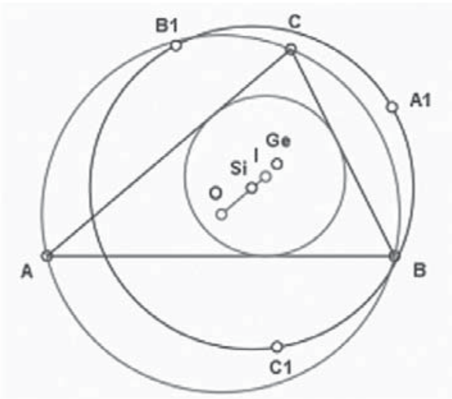


Фиг. 3

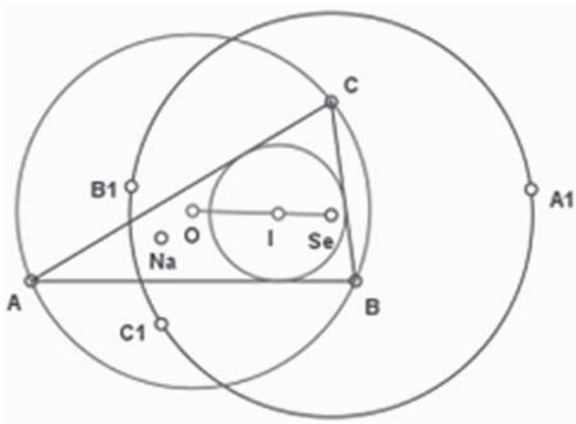
Задача 2а. В означенията на задача 2 определяме точка Y така, че триъгълниците YP_2Q_3, Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви. Да се построи с линийка и пергел точката Y.

Точката Y в горната задача може да бъде построена, като се използва теорема 2. Тази точка се нарича Yff Center of Congruence и е дефинирана през 1987 г. от холандския математик Peter Yff. В последните години задачата за построяване с линийка и пергел на точката Y привлича вниманието на изследователите. На нея е посветена статия в Wikipedia[5] – Yff Center of Congruence. Може да се отбележи, че в тази статия се цитират резултати по темата, получени през 2007 г. от прототипа на „Откривател“ (JCGM[6], 2007, Yff Center of Congruence). Отбелязано е, че прототипът на „Откривател“ „has generated several interesting results“. По този начин резултати на прототипа на „Откривател“ вече са влезли в Уикипедия.

Теорема 3. The Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle is the Circumcenter of the Triangle of Reflections of the Gergonne Point in the Sidelines of Triangle ABC.



Фиг. 4



Фиг. 5

Задача 3. Даден е ΔABC и нека Pa, Pb и Pc са допирните точки на вписаната в ΔABC окръжност и съответно със страните BC, CA и AB. Докажете, че правите APa, BPb и CPc се пресичат в една точка. Да означим пресечната точка с Ge. Нека A_1, B_1 и C_1 са симетричните точки на Ge относно правите BC, CA и AB. Означаваме със Si центъра на окръжността през точките A_1, B_1 и C_1. Докажете, че Si е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC (Фиг.4).

Теорема 4 по-долу е аналогична на теорема 3.

Теорема 4. The External Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle is the Circumcenter of the Triangle of Reflections of the Nagel Point in the Sidelines of Triangle ABC.

Задача 4. Даден е ΔABC и нека Pa е допирната точки на страната BC и външновписаната за ΔABC окръжност, лежаща срещу $\measuredangle A$. Аналогично определяме точките Pb и Pc. Докажете, че правите APa, BPb и CPc се пресичат в една точка. Да означим пресечната точка с Na. Нека A_1, B_1 и C_1 са симетричните точки на Na относно правите BC, CA и AB. Означаваме със Se центъра на окръжността през точките A_1, B_1 и C_1. Докажете, че Se е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност за ΔABC (Фиг.5).

Тема 2. Центрове на перспектива

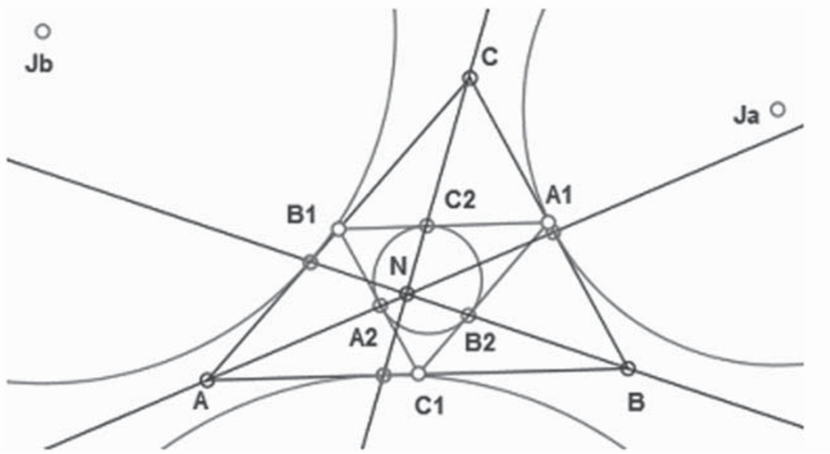
При подхода на Kimberling всяка забележителна точка на ΔABC се определя като център на перспектива на ΔABC и един друг триъгълник. Например медицентърът се дефинира като център на перспективата на ΔABC и медиалния триъгълник на ΔABC. Перспективните триъгълници се използват в Евклидовата геометрия и при задачите за построение с линийка и пергел, както и при други задачи.

Казваме, че два триъгълника ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ са *перспективни*, ако правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка. Пресечната точка на правите се нарича *център на перспективата*. В последно време вместо термина „център на перспективата" се използва терминът „перспектор". В някои случаи перспекторите са центрове на хомотетия на триъгълниците.

По-долу ще преформулираме две теореми за перспектори, произведени от „Откривател".

Теорема 5. The Nagel Point is the Prespector of Triangle ABC and the Intouch Triangle of the Medial Triangle.

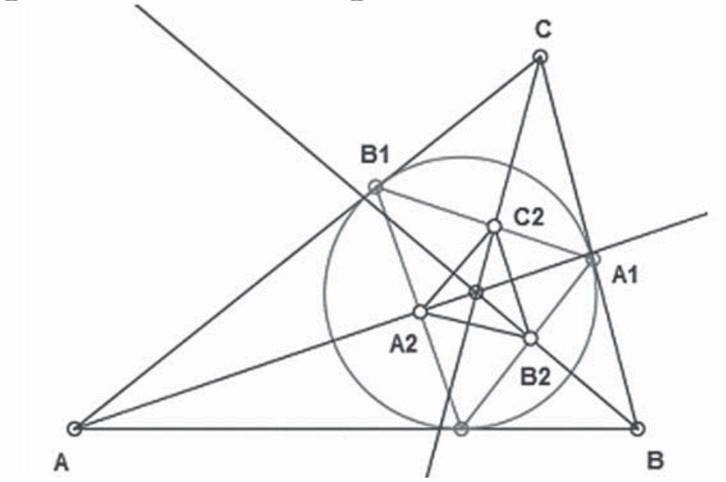
Задача 5. Даден е ΔABC и нека A_1 е средата на страната BC. Аналогично определяме точките B_1 и C_1. Нека A_2 е допирната точка на вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност и страната B_1C_1. Аналогично определяме точките B_2 и C_2. Докажете, че правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка. Да означим с N тази пресечна точка. Докажете, че правата AN пресича правата BC в точката, която е допирната точка на външновписаната в ΔABC окръжност, която е срещу $\angle A$. Докажете аналогични твърдения и за правите BN и CN (Фиг.6).



Фиг. 6

Теорема 5 наскоро беше включена в Kimberling, Nagel Point, като е отбелязано, че теоремата е открита през 2011 г. от Randy Hutson. Всъщност, теоремата е открита не от човек, а от компютърна програма, от прототипа на „Откривател" и е публикувана през 2007 г. в JCGM (2007, Nagel Point). Подобна е ситуацията и с поредица от подобни теореми, наскоро включени в Kimberling и които са публикувани през 2007 г. в JCGM (виж например Kimberling, Symmedian Point; Kimberling, Mittenpunkt и т.н.). Авторите благодарят на Кимбърлин за оценката на важността на теоремите, изразена в това, че са включени в енциклопедията Kimberling.

Теорема 6. The Yff Center of Conguence is the Prespector of Triangle ABC and the Incentral Triangle of the Intouch Triangle.

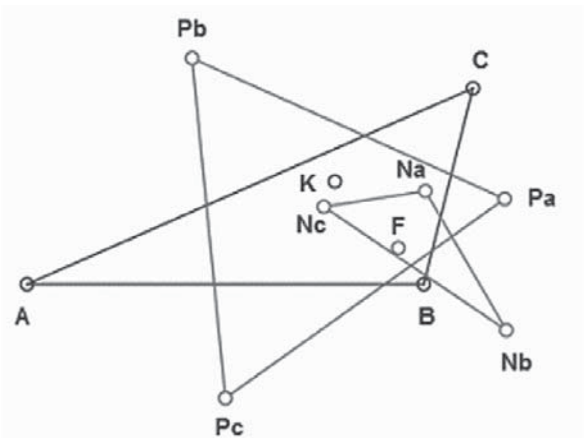


Фиг. 7

Задача 6. Даден е ΔABC и нека A_1 е допирната точка на вписаната в ΔABC окръжност и страната BC. Аналогично определяме точките B_1 и C_1. Нека I е центърът на вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност и нека правата A_1I пресича страната B_1C_1 в точка A_2. Аналогично определяме точките B_2 и C_2. Докажете, че правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка (Фиг.7). Да означим с Y тази пресечна точка. В означенията на задача 2 докажете, че триъгълниците YP_2Q_3, Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви.

Теорема 6 дава още един подход за построяване с линийка и пергел на точката на Yff, т. е. теорема 6 може да послужи, за да получим още едно решение на задача 2а.

Теорема 7. The Fourth Brocard Triangle is perspective with the Triangle of the Circumcenters of the Triangulation Triangles of the Outer Fermat Point.



Фиг. 8. Точка K е пресечна точка на правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$ (правите не са начертани на чертежа).

Задача 7. Даден е ΔABC и нека $\Delta BCFa$ е равнобедрен триъгълник с основа BC и ъгъл при основата 60^o, като върхът Fa не е в полуравнината, определена от правата BC, в която се намира върхът A. Аналогично определяме триъгълници $CAFb$ и $ABFc$. Докажете, че правите AFa, BFb и CFc се пресичат в една точка. Да означим тази точка с F. Нека Pa е центърът на описаната около ΔBCF окръжност. Аналогично дефинираме точките Pb и Pc. Нека Na е пресечната точка на правата през медицентъра на ΔABC и върха A и окръжността, която има за диаметър отсечката, свързваща медицентъра и ортоцентъра на ΔABC. Аналогично определяме точките Nb и Nc. Докажете, че правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$ се пресичат в една точка (Фиг.8).

Резултати, получени с „Откривател“, могат да бъдат преформулирани като две задачи, които допълват задача 7.

Задача 7a. Даден е ΔABC и нека La и Ma са пресечните точки съответно на вътрешната и външната ъглополовяща на $\angle A$. Нека cA е окръжността с диаметър $LaMa$. Аналогично определяме окръжности cB и cC. Нека K е пресечната точка на правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$, определени в условието на задача 7. Докажете, че окръжностите cA, cB и cC се пресичат в точка K.

Задача 7b. Нека $\Delta PaPbPc$ е триъгълникът, определен в условието на задача 7. Докажете, че този триъгълник е равностранен.

Окръжностите, определени в условието на задача 7a, са окръжностите на Аполон за ΔABC, а $\Delta NaNbNc$, определен в условието на задача 7, е инволюционният триъгълник, изучаван в Гроздев & Ненков от 2012.

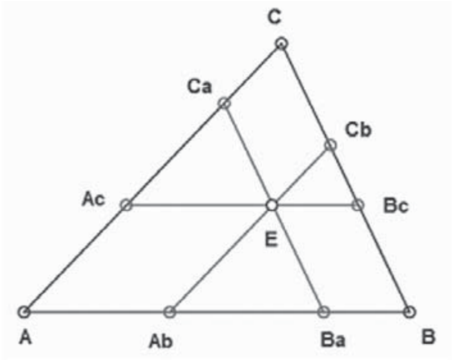
Тема 3. Произведения на забележителни точки в триъгълника

През последните години интензивно се изучават различни видове произведения и трансформации на забележителни точки в триъгълника. През 2011 г. Randy Hutson (Kimberling, Kosnita Point) дефинира произведение на забележителни точки в триъгълника, наречено от него „произведение на Коснита“ („Kosnita Product“). Произведението на Коснита е определено не за всички двойки забележителни точки. Ще отбележим, че вместо „Kosnita Product“ „Откривател“ използва термина „Triangulation Product“.

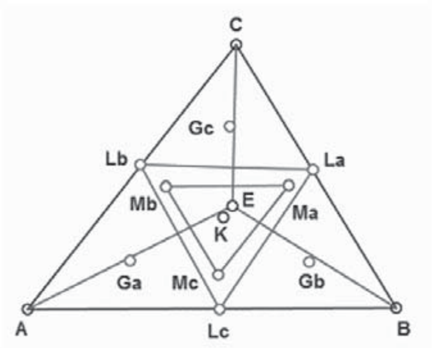
Нека P и Q са две забележителни точки в ΔABC, а O_A е забележителна точка от тип Q в ΔPBC. Аналогично определяме точките O_B и O_C. Казваме, че $\Delta Q_AQ_BQ_C$ е *триъгълник на Коснита* и ако ΔABC и $\Delta Q_AQ_BQ_C$ са перспективни, казваме, че е определено *произведение на Коснита* на точките P и Q, което е равно на перспектора на тези триъгълници. Произведението на Коснита бележим с $K(P,Q)$. Ако триъгълниците ΔABC и $\Delta Q_AQ_BQ_C$ не са перспективни, произведение на Коснита не е определено.

По-долу ще преформулираме една от теоремите за произведение на Коснита, открита от „Откривател“.

Теорема 8. The Triangulation Product of the Equal Parallelians Point and the Centroid is the Grinberg Point.



Фиг. 9



Фиг. 10

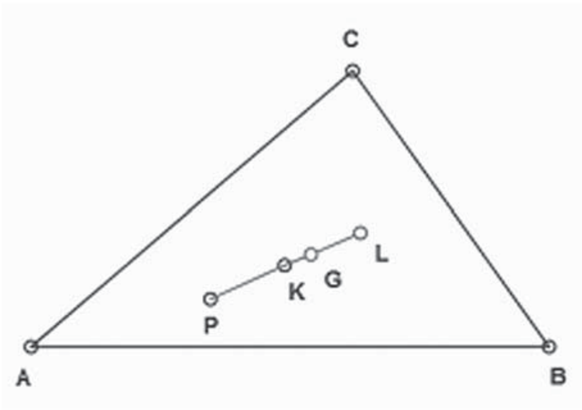
Задача 8. Докажете, че във вътрешността на ΔABC има единствена точка със следното свойство. Нека правата през точката, която е успоредна на *BC*, пресича страните *AB* и *AC* съответно в точките *Ba* и *Ca*. Аналогично определяме точките *Ab*, *Cb*, *Ac* и *Bc*. Тогава отсечките *BaCa*, *AbCb* и *AcBc* имат еднаква дължина (Фиг. 9). Да означим тази точка с *E*. Нека *Ma* е медицентърът на ΔBCE. Аналогично определяме точките *Mb* и Mc. Нека *La* е пресечната точка на вътрешната ъглополовяща на $\angle A$ и страната *BC*. Аналогично определяме точките *Lb* и *Lc*. Нека *Ga* е медицентърът на $\Delta ALbLc$. Аналогично определяме точките *Gb* и *Gc*. Докажете, че правите *AMa*, *BMb*, *CMc*, *AGa*, *BGb* и *CGc* се пресичат в една точка (Фиг. 10).

На фиг. 10 пресечната точка на правите *AMa*, *BMb*, *CMc*, *AGa*, *BGb* и *CGc* е означена с *K*, като правите не са начертани на фигурата.

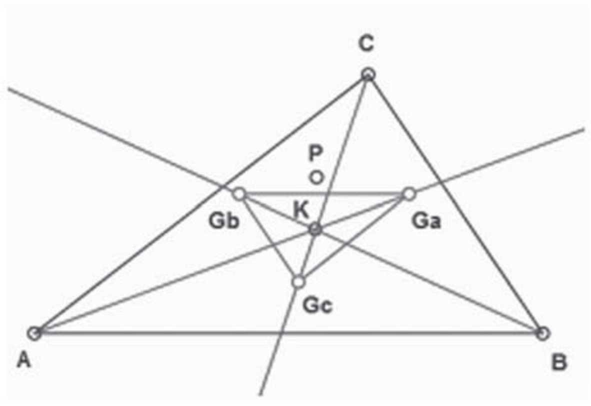
Ще преформулираме и една теорема за произведения на Коснита, открита от „Откривател“, в която фигурира произволна точка от ΔABC. Тази теорема може да бъде използвана за лесно намиране на произведения на Коснита от вида $K(P,G)$, където *G* е медицентърът на ΔABC.

Теорема 9. The Triangulation Product of Point P and the Centroid is the Complement of the Complement of Point P.

Задача 9. Нека *P* е произволна точка в равнината на ΔABC, различна от върховете на триъгълника, а *G* е медицентърът на ΔABC. Нека *Ga* е медицентърът на ΔPBC. Аналогично определяме точките *Gb* и *Gc*. Нека *L* е образът на точката *P* при хомотетията $h(G, k)$ с център *G* и коефициент $k = -\frac{1}{2}$. Нека *K* е образът на точката *L* при същата хомотетия $h(G, k)$ (Фиг.11). Докажете, че правите *AGa*, *BGb* и *CGc* се пресичат в точка *K* (Фиг.12).



Фиг. 11



Фиг. 12

Може да се отбележи, че K в горната задача е точката, която дели вътрешно отсечката PG в отношение 3:1. Задачата по-горе е формулирана така, че да може да бъде проследено преформулирането на теоремата.

Скица на доказателство. Без ограничение на общността избираме ортонормирана координатна система Oxy така, че върховете на триъгълника да имат следните координати: $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$. Нека $P(u, v)$ е произволна точка в равнината на триъгълника, различна от върховете му. Нека точките Ma, Mb, Mc са средите съответно на отсечките BC, CA, AB. Намираме медицентъра на триъгълника G като точката, която дели вътрешно отсечката AMa в отношение 2:1. Аналогично намираме медицентровете Ga, Gb, Gc на триъгълниците PBC, PCA, PAB като точките, делящи вътрешно съответно отсечките PMa, PMb, PMc в отношение 2:1. Намираме точка K, която дели вътрешно отсечката PG в отношение 3:1. Доказваме, че точките A, K, Ga лежат на една права. Доказваме, че точките B, K, Gb лежат на една права, а също, че и точките C, K, Gc лежат върху една права. От това следва, че точката K лежи едновременно върху правите AGa, BGb и CGc, което означава, че K е пресечна точка на тези прави. Ще отбележим, че същата схема на доказателство може да се приложи, като се използват не декартови, а барицентрични координати. В някои задачи барицентричните координати са по-удобни. При тях може да се използва обстоятелството, че барицентричните координати на редица забележителни точки и на други обекти в геометрията на триъгълника са предварително пресметнати и могат да се използват наготово. Например в доказателството на тази задача можем да използваме барицентричните координати на медицентъра $G = (1,1,1)$, а нормираните барицентрични координати са $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Прилагаме програмата за компютърна алгебра Maple за изготвяне на доказателството. По този начин доказателството се свежда до писането на поредица от команди на Maple и щракане с мишката, като си спестяваме пресмятанията. По този начин се постига бързина и освен това се избягват евентуални грешки. Файлове на Maple с командите и резултатите от тяхното изпълнение са приложени към статията. Файлът Theorem9_1.mws съдържа командите, които използваме при доказателство с декартови координати, а файлът Theorem9_2.mws съдържа командите при доказателство с барицентрични координати.

От теорема 9 може да се получи като следствие теорема 8, ако отчетем следното твърдение, което лесно се получава с „Откривател“: „The Grinberg Point is the Complement of the Complement of the Equal Parallelians Point“.

В Евклидовата геометрия възникват много случаи за намиране на композиции на различни трансформации, като цитираната теорема съдържа пример за композиция на трансформации от вида „Complement of Complement“. Трансформации и композиции на трансформации могат лесно да бъдат изучавани с „Откривател“, но това е отделна тема, която тук няма да бъде разглеждана.

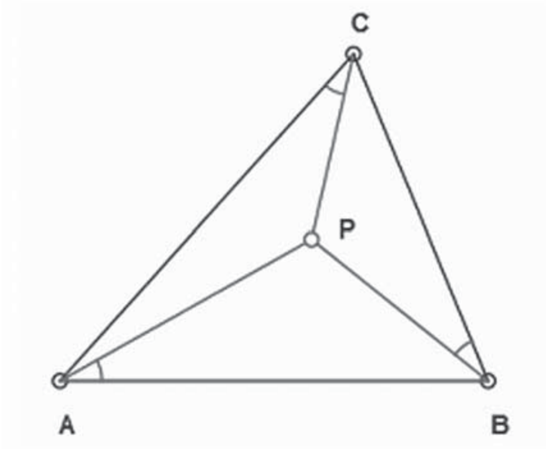
Тема 4. Геометрични места на забележителни точки в триъгълника

В последно време различни геометрични места на забележителни точки в триъгълника са обект на обширно изучаване. Особено внимание се отделя на геометричните места, които са криви от втора и трета степен. Едно от първите геометрични места на забележителни точки в триъгълника е хиперболата на Кипърт (Kiepert), въведена от Кипърт през 1869 г.

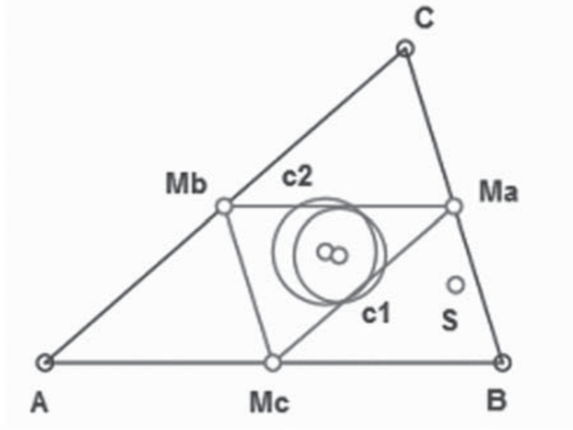
По-долу ще преформулираме една от теоремите за геометрично място.

Теорема 10. The External Center of Similitude of the Brocard Circle and the Second Brocard Circle of the Medial Triangle lies on the Kiepert Hyperbola.

Задача 10. Докажете, че във вътрешността на даден ΔABC съществува единствена точка P – такава, че $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ (фиг. 13), и съществува единствена точка Q – такава, че $\angle PBA = \angle PCB = \angle PAC$. Нека $c1$ е окръжността през точките P, Q и през центъра на окръжността, описана около ΔABC. Нека $\Delta MaMbMc$ е медиалният триъгълник на ΔABC, а Om е центърът на описаната около $\Delta MaMbMc$ окръжност. Нека точка Pm е определена както точка P, но спрямо $\Delta MaMbMc$. Нека $c2$ е окръжността с център Om и минаваща през точка Pm. Нека S е външният център на хомотетия на окръжностите $c1$ и $c2$ (Фиг. 14). Докажете, че съществува ъгъл α, определен, както следва. Нека $BCFa$ е равнобедрен триъгълник с основа BC и ъгъл при основата, равен на α. Аналогично определяме $\Delta CAFb$ и $\Delta ACFc$. Тогава правите AFa, BFb и CFc се пресичат в точка S.



Фиг. 13



Фиг. 14

Нееднозначност на естествените езици

В теорема 2 е определена точката „Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle wrt the Pedal Triangle of the Incenter". Ако в горното определение заменим „wrt" с „of", ще получим друга точка. Двата текста коректно описват съответните точки, но при положение че правим ясна разлика между предлозите. Различните автори се справят с този проблем по различен начин. Ако се налага да именуваме все по-сложни обекти, трябва да следваме правила за именуването на обектите. Тези правила са описани в CGEEG (2013).

Заключителни бележки

В тази статия с примери е показано как една теорема, открита от „Откривател", може да се преформулира във вид, подходящ за използване в средното училище. Компютърната програма „Откривател" е в начален етап на разработване. Авторите се надяват, че с помощта на читателите следващите тестови версии на компютърната програма ще бъдат в състояние да произведат една пълна енциклопедия по Евклидова геометрия. Тази енциклопедия би следвало да включва около сто хиляди теореми, поне половината от които са нови и са открити от компютъра. Това ще бъде и един източник на задачи за учебния процес, за сборници, реферати, дипломни работи, кръжоци, за подготовка за олимпиади и т.н.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът apps.zip, който съдържа два файла във формат MWS (формат на Maple), които са цитирани в тази статия.

Този файл може да бъде изтеглен от уеб страницата на книжката на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Weisstein, E. W. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. http://mathworld.wolfram.com/
2. *CGEEG*, *Computer-Generated Encyclopedia of Euclidean Geometry,* (2013), in preparation.
3. Pohoata, C. (2010). On the Euler Reflection Point, *Forum Geometricorum*, 10, 157-163. http://forumgeom.fau.edu/FG2010volume10/FG201018.pdf
4. Kimberling, C. *Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers*, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
5. *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/
6. *JCGM*, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, http://www.ddekov.eu/j/index.htm

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С., В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.

Гроздев С., Д. Деков (2013). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия. *Математика и информатика*, 56, 1, 49 – 59.

Паскалев, Г. (2001). *Математика за 8. клас*. София: Архимед.

Станилов, Г. (2004). Компютърни методи в геометрията на триъгълника. *Proc. of the 33. Spring Conf. of the Union of Bulg. Mathematicians*. София: СМБ.

SOME APPLICATIONS OF THE COMPUTER PROGRAM „DISCOVERER“

Abstract. The aim of the computer program „Discoverer“, which is in process of development by the authors of this article, is to discover new theorems in Euclidean Geometry. The authors present some theorems, generated by „Discoverer“ and show how these theorems could be used.

Sava Grozdev
✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov
✉ Associated Professor, PhD in Mathematics
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora
E-mail: ddekov1@gmail.com