ГРАФИЧНО И ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С КОМПЮТЪР

Сава Гроздев, Деко Деков

Резюме. В статията се разглеждат методи за графично и числено решаване на уравнения и неравенства с помощта на компютър. Дискутира се прилагането на компютърната програма „Граф“ за решаване на тези задачи.

Keywords: computer-aided solution, equation, inequality, table, Graph

Графичното решаване на уравнения е включено в учебната програма за 10. клас на средното училище. Навлизането на компютрите в образователния процес открива нови възможности за подобряване на образованието по математика. В тази статия ще разгледаме използването на компютърната програма „Граф“ за графично решаване на уравнения и неравенства в средното училище. Програмата ще бъде приложена и за числено решаване на уравнения и неравенства, което засега не е включено в учебната програма. Но това е тема, познаването на която е необходимо на завършващите училище. С помощта на компютъра численото решаване на уравнения и неравенства става лесно, което открива възможност темата да бъде включена в учебната програма. Тази статия е продължение на статията Гроздев & Деков от 2013 и ще считаме, че казаното в нея е известно на читателя.

Изчертаването на графики с помощта на компютърна програма е важно допълнение към усвояването на чертането на графики с молив и хартия. Използването на компютри за чертане на графики на функции обаче открива нови възможности не само за бързо и прегледно чертане, но и за графично и числено решаване на уравнения, неравенства и системи от уравнения, за намиране на екстремуми на функции, за апроксимиране на таблични данни с непрекъснати функции, за намиране на лице на криволинеен трапец и т.н. Чертането с компютър на графики на функции, техните производни и допирателните в определени точки на графиката реализира принципа за нагледност в темите по математически анализ, включени в учебната програма за 12. клас. Компютърната програма „Граф“ е отличен инструмент за решаване на изброените задачи. По-долу ще разгледаме примери за използването ѝ при числено решаване на уравнения и неравенства.

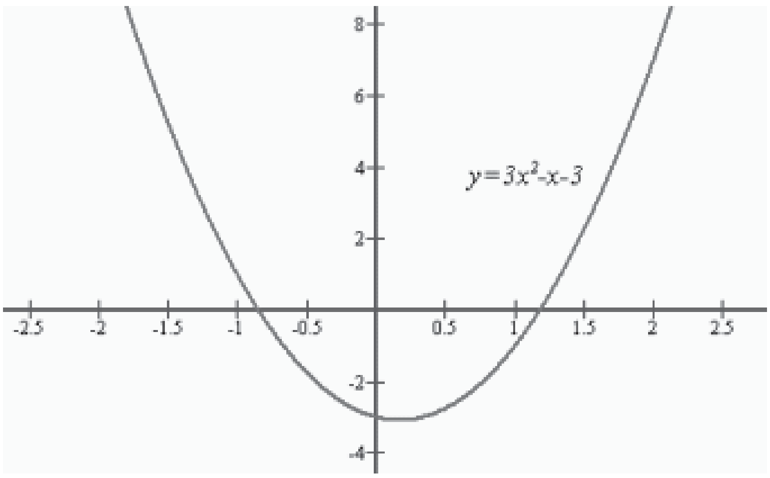
Да решим графично уравнение от вида $f(x)=0$ означава да начертаем графиката на функцията $f(x)$ и да установим къде графиката на тази функция пресича абсцисната ос. Точките, в които графиката на функцията пресича абсцисната ос, са решенията на уравнението. При графично решаване на уравнения се използва и подход, при който уравнението се представя във вида $f_1(x) = f_2(x)$ и се търсят пресечните точки на графиките на функциите от двете страни на равенството. Записването на уравнението във вида $f(x) = 0$ обаче има предимства. При такъв запис по-лесно се онагледяват пресечните точки. Освен това, при компютърно начертана графика може да се променя мащабът и да се видят по-ясно пресечните точки, както е показано по-долу. При запис на уравнението във вида $f(x) = 0$ можем да използваме и компютърни таблици за стойностите на функцията $f(x)$, ако решим да използваме числен метод. Поради тези причини в примерите по-долу ще използваме подхода, при който уравнението е записано във вида $f(x) = 0$.

Казаното за уравнения е в сила и при решаването на неравенства. Използването на графики унифицира решаването на уравнения и неравенства, тъй като и в двата случая задачата се свежда до намирането на пресечните точки на графиката на функция с абсцисната ос.

По-долу ще използваме точка, вместо запетайка при запис на едно число като десетична дроб. Компютърните програми използват този запис.

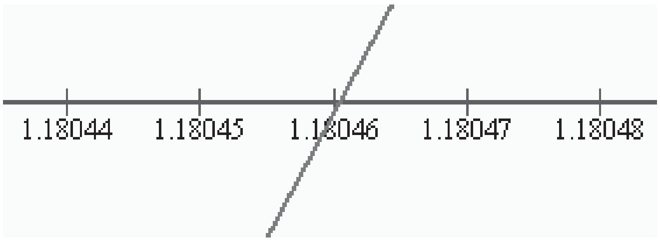
Задача 1. (Паскалев, 2001) (стр. 32, задача 2). Решете графично и числено уравнението $3x^2 - x - 3 = 0$.

Решение: С компютърната програма „Граф“ начертаваме графиката на функцията $f(x) = 3x^2 - x - 3$ и определяме приблизително къде са пресечните точки на графиката на тази функция с абсцисната ос. Както и в решението от (Паскалев, 2001), можем да наблюдаваме приближените стойности за корените $x_1 \approx -0,8$ и $x_1 \approx 1,2$ (фиг.1).



Фиг. 1.

При графика, получена с молив върху хартия, имаме ограничения колко точно можем да определим приближените стойности на корените. Компютърната програма „Граф“ дава възможност да променим мащаба, като щракнем няколко пъти върху иконата за увеличаване на изображението, след което можем да установим по-точни стойности на корените. Например за втория корен можем да получим, че е между 1.18046 и 1.18047, като коренът е по-близо до 1.18046 (Фиг.2). Поради това е законно да приемем, че $x_2 \approx 1.18046$. Можем също така да установим, че грешката която правим, т. е. абсолютната стойност на разликата на точната и приближената стойности на корена, е по-малка от 0.0001.



Фиг. 2. Графиката на функцията пресича абсцисната ос близо до 1.18046.

Избраната точност е приемлива при числено решаване на задачи в средното училище. Тази точност се постига още при графичното решение с компютър. Ще разгледаме и числен метод, при който също можем да получим приемлива точност без пресмятания. Ще използваме таблиците на „Граф“, като ще считаме, че читателят е вече запознат с използването на тези таблици от статията (Гроздев & Деков, 2013). В диалоговия прозорец за таблица на „Граф“ задаваме интервал, в който ще търсим приближена стойност на корен, например на x_2. Избираме интервал, в който е коренът, например интервала от 1 до 1.5. Нека да поискаме грешката, с която ще намерим x_2, да е не по-голяма от 0.001. Задаваме в таблицата $\Delta x = 0.001$. „Граф“ визуализира таблица, редовете на която са стойностите на $f(x)$ при $x = 1$, 1.001, ... , 2. Сега търсим в таблицата стойността на $f(x)$, която е най-близо до 0. Обръщаме внимание на следните редове от таблицата:

1.180	-0.0028000000
1.181	0.0032830000

Тези редове показват, че търсеният корен е в интервала от 1.180 и 1.181. Можем да приемем за приближено решение едно от тези числа, като грешката ще бъде по-малка от 0.001. Ако желаем по-голяма точност, трябва да направим още едно приближение. В диалоговия прозорец за таблица на „Граф“ задаваме интервала от 1.180 до 1.181 и $\Delta x = 0.00001$. В таблицата намираме следните редове:

1.18046	-0.0000025652
1.18047	0.0000582627

Това означава, че търсеният корен е в интервала от 1.18046 до 1.18047. Можем да направим още едно приближение, ако желаем още по-голяма точност. При зададен интервал от 1.18046 до 1.18047 и $\Delta x = 0.00000001$ разглеждаме редовете

1.18046042	-0.0000000104
1.18046043	0.0000000504

За решение можем да приемем $x_2 \approx 1.18046042$ или $x_2 \approx 1.18046043$, като и в двата случая грешката ще бъде по-малка от 0.0000001. Можем да извършим закръгляване на избраното числото и да приемем, че $x_2 \approx 1.1804604$, като при това положение всички цифри в записа на x_2 са верни.

Ще отбележим, че численият методът, изложен по-горе, с някои подобрения може да бъде използван за създаване на компютърна програма, с която да се решават едномерни, двумерни и тримерни оптимизационни задачи. Такава компютърна програма, създадена от втория автор на тази статия, е използвана например за решаване на задача от геодезията (Dekov, 2012).

Задача 2. Решете графично и числено неравенството $3x^2 - x - 3 \geq 0$.

Решение: Неравенството е от вида $f(x) \geq 0$, като графиката на функцията $f(x) = 3x^2 - x - 3$ е вече построена в решението на предишната задача и е показана на фиг. 1. От графиката се наблюдават приближено интервалите, в които функцията $f(x)$ има стойности, по-големи от 0, а по-точното намиране на стойностите на краищата на интервалите, т. е. на пресечните точки на графиката на функцията и абсцисната ос, става както при предишната задача.

Методите за графично и числено решаване на уравнения и неравенства стават задължителни при задачи, които не допускат точни решения. Задачите, при които не може да бъде получено решение с алгебрични преобразувания, се игнорират в средното училище, но при практическите задачи, в т. ч. инженерни, икономически, финансови и други, дори задачата да допуска точно решение, едно приближено решение, записано като крайна десетична дроб, е за предпочитане. От решенията на задачите по-горе се забелязва, че всъщност приближени решения могат да се получат лесно, при това с прост метод. Този метод е еднакво приложим за всички видове уравнения и неравенства – алгебрични и трансцендентни, такива, които се решават със символни преобразувания, или нерешими със символни преобразувания. Усвояването в средното училище на методи за графично и числено решаване на уравнения и неравенства е необходимо за повишаване на нивото на образованието.

За решаване на задачите по-долу използваме методите, изложени в решенията на задачи 1 и 2.

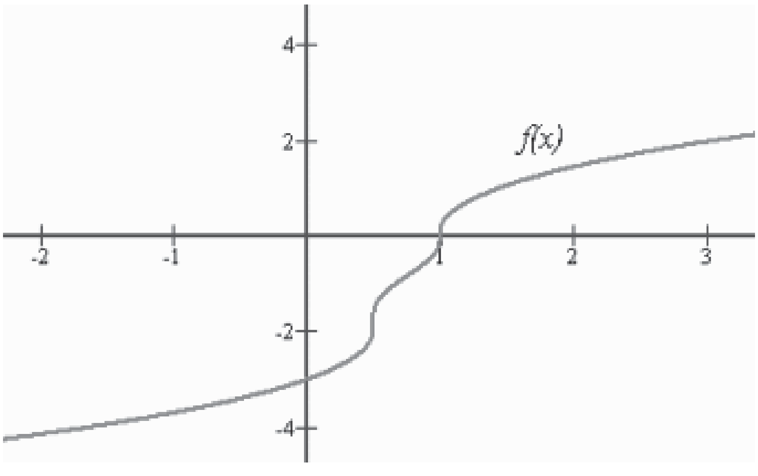
Задача 3. Решете уравнението

а) $\log_2(x) = 3 - x$; б) $\log_2(x) = 2 - x$; в) $\log_3(x) = 3 - x$.

Задача 3а) е от учебника на Паскалев от 2002 на стр.159, задача 6. Тази задача би могла да припомни на учениците, че методите за решаване на логаритмични уравнения, изучавани в училище, невинаги могат да бъдат прилагани. При решаването на задача 3а) е удобно е да използваме графиката на функцията $f(x) = \log_2(x) + x - 3$. С „Граф" начертаваме графиката на $f(x)$ и установяваме, че пресечната точка на графиката и абсцисната ос е $x \approx 2$. Това е приближено решение. В този случай обаче можем да трансформираме това приближено решение в точно решение, като извършим проверка и установим, че $x = 2$ е решение на уравнението. Задачи 3б) и 3в) показват, че малки промени в условието на задача 3а) водят до задачи, при които проверката няма да помогне за намиране на точно решение и единственият изход е приближеното решение. Оставяме решението на читателя.

Задача 4. (Паскалев, 2002) (стр.103, задача 3) Решете уравнението $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

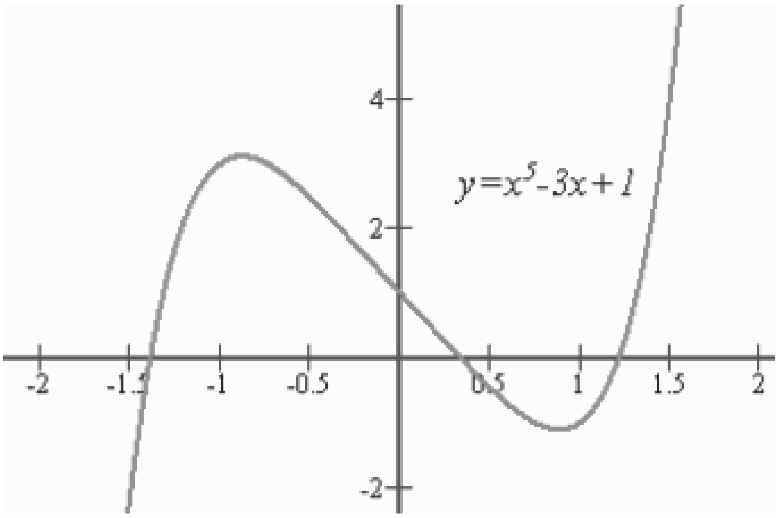
Решение: От графиката на функцията се вижда, че тя пресича абсцисната ос в една точка, а именно в $x \approx 1$ (Фиг.3). Проверката показва, че $x = 1$ е корен на уравнението. Заключаваме, че уравнението има единствено решение $x = 1$.



Фиг. 3.

Задача 5. Решете неравенството $x^5 - 3x + 1 \leq 0$

Решение: Уравнението $x^5 - 3x + 1 = 0$ не може да бъде решено с алгебрични преобразувания и затова трябва да използваме графичен или числен метод. При това положение решението ще зависи от точността, с която искаме да го получим. Построяваме графиката на функцията $f(x) = x^5 - 3x + 1$. (Фиг.4).



Фиг. 4.

Едно приближено решение е $x \in (-\infty, -1.38879] \cup [0.33473, 1.21465]$. Можем да отбележим, че ако използваме компютърната програма Maple, с командата fsolve(x^5-3*x+1,x); за краищата на интервалите получаваме съответно приближените числа -1.388791984, 0.3347341419 и 1.214648043. Компютърната програма Maple е мощен инструмент за работа в областта на математиката, но не е безплатна и освен това е ориентирана главно към висшата математика.

За реформа на значенията в областта на математиката

Някои от означенията в областта на математиката, приети в България, се различават от означенията, приети в други държави. Те се различават и от означенията, приети в езиците за програмиране. Това обстоятелство все повече води до неудобства. Като пример, в България се използва запетайка при запис на число като десетична дроб (десетична запетайка), а в езиците за програмиране, както и все повече като стандарт в литературата по света се използва точка (десетична точка). Подобно е положението и с означенията на някои функции, например функцията тангенс (стандартното означение е tan(x)) и т.н. В математиката унифицирането на означенията винаги е имало важна роля, така че процесът на унификация на означенията, започнал с възникването на първите означения в математиката, продължава и днес. Авторите считат, че е време означенията, приети в областта на математиката в България, да бъдат уеднаквени със стандартите, които са приети в света.

Заключителни бележки

С компютърната програма „Граф“ читателят може да намери графични и числени решения на сложни полиномиални, модулни, ирационални, показателни, логаритмични, тригонометрични и други видове уравнения и неравенства, като използва простите методи, изложени в тази статия.

ЛИТЕРАТУРА

Dekov, D. (2012). A Numerical Method for Solving the Horizontal Resection Problem in Surveying, *Journal of Geodetic Science*, vol. 2 no 1, 65 – 67.

Гроздев С., Д. Деков. (2013). Екстремални задачи в средното училище с помощта на компютърни таблици, *Математика и информатика*, № 4, 351 – 367.

Паскалев, Г. (2001). *Математика за 10. клас, второ равнище*, София: Архимед.

Паскалев, Г. (2002). *Математика за 11. клас, второ равнище*, София: Архимед.

GRAPHICAL AND NUMERICAL COMUTER-AIDED SOLUTIONS OF EQUATIONS AND INEQUALITIES

Abstract. The paper considers methods for graphical and numerical computer-aided solutions of equations and inequalities. It discusses the application of the computer program Graph to such problems.

Sava Grozdev
✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov
✉ Associated Professor, PhD in Mathematics
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora
E-mail: ddekov1@gmail.com