Educational Technologies
Образователни технологии

КОМПЮТЪРНО ГЕНЕРИРАНА МАТЕМАТИКА: РАЗРАБОТВАНЕ НА ТЕМА ОТ ЕВКЛИДОВАТА ГЕОМЕТРИЯ

Сава Гроздев, Деко Деков
Българска академия на науките

Резюме. Илюстрирано е разработването на тема от Евклидовата геометрия с помощта на компютърната програма „Откривател“. Като изходен пункт се използва отделна теорема или група от сходни теореми. В тази статия са дадени 283 теореми, открити от компютърната програма „Откривател“. Авторите предполагат, че една част от тях са нови. Теоремите, произведени от „Откривател“, могат да бъдат преформулирани като задачи, в общия случай по повече от един начин.

Keywords: computer-generated mathematics, Euclidean geometry, Discoverer, mathematical olympiad

1. От теорема към тема

Авторите предполагат, че читателят е запознат с техни предишни статии, посветени на компютърната програма „Откривател“, виж (Гроздев & Деков, 2013a,b).

В статията (Гроздев & Деков, 2013b) е спомената след преформулиране следната теорема:

Теорема 1. The Symmedian Point is the Perspector of Triangle ABC and the Medial Triangle of the Orthic Triangle of ABC.

Ще използваме теорема 1 като изходен пункт за разработването на тема с помощта на компютърната програма „Откривател“. Изискването към темата е да включва теорема 1, както и сходни с нея. По-долу поясняваме понятието „сходни теореми“.

Да разгледаме структурата на теорема 1. За даден ΔABC конструираме $\Delta A_1B_1C_1$, който е производен на ΔABC – това е триъгълникът, чиито върхове са петите на височините на ΔABC (ортоцентричен триъгълник). След това построяваме медиалния триъгълник $A_2B_2C_2$ на $\Delta A_1B_1C_1$. Изучаваме въпроса дали правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка. Ако това е така, идентифицираме точката на пресичане с някоя от известните забележителни точки на триъгълника.

С помощта на пример ще разгледаме обобщение на горната процедура. Предполагаме, че $\Delta A_1B_1C_1$ е включен в базата данни с триъгълници на „Откривател“, а ако не е включен, го включваме. От базата данни на „Откривател“ избираме множество от триъгълници, включващо $\Delta A_1B_1C_1$. Определенията на използваните триъгълници могат да се намерят във (Weisstein). Избраното множество от триъгълници е дадено като списък List 1 в приложения файл List1.htm. Ще отбележим, че за по-лесно ориентиране на потребителя „Откривател“ номерира елементите на множествата. Избираме второ множество от триъгълници, което включва триъгълник от типа на $A_2\,B_2\,C_2$. В примера, който разглеждаме, приемаме, че това второ множество съвпада с множеството в List 1. По-нататък процедираме както в теорема 1. Програмата „Откривател“ построява всички триъгълници от вида „$A_2\,B_2\,C_2$ of $\Delta A_1B_1C_1$“. Това множество от триъгълници е изброено в List 2 в приложения файл List2.htm. Тъй като List 1 съдържа 42 триъгълника, то списъкът List 2 съдържа $42^2 = 1764$ триъгълника. Ще отбележим, че в някои случаи списъкът с триъгълници от вида „$A_2\,B_2\,C_2$ of $\Delta A_1B_1C_1$“ може да съдържа по-малък брой триъгълници, тъй като е възможно триъгълник от този вид да бъде изроден, т.е. да е с лице, равно на нула. Компютърната програма „Откривател“ третира изродените триъгълници като обекти от друг вид и не ги включва в множества от триъгълници.

Като следваща стъпка трябва да преценим дали е целесъобразно „Откривател“ да приложи процедурата „Чистене на триъгълници“ („Cleaning of Triangles“). При тази процедура, ако в едно множество от триъгълници има съвпадащи триъгълници, „Откривател“ оставя само един от тях и премахва останалите. Подобна процедура може да се прилага към обекти от всякакъв вид. В конкретния случай прилагаме процедурата „Чистене на триъгълници“ към множеството в List 2. С още едно прилагане на процедурата отстраняваме от List 2 и триъгълниците, които съвпадат с ΔABC или с триъгълник от List 1. След „почистването“ получаваме списъка List 3, даден във файла List3.htm. В List 3 остават 1720 триъгълника. Невинаги е целесъобразно да прилагаме процедурата „Чистене на триъгълници“, тъй като при нея се губи информация. В конкретните задачи се прилага конкретен подход.

Като следваща стъпка за всеки триъгълник $\Delta A_2B_2C_2$ от множеството List 3 „Откривател“ проверява дали правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка, като подрежда в списък пресечните точки, в случай че правите се пресичат в една точка. Да напомним, че тези точки се наричат „перспектори“. Перспекторте са подредени в списъка List P, даден във файла 1_List_P.php.htm. Виждаме, че в List P „Откривател“ е подредил 283 перспектора. В List P има съвпадащи точки, но преценяваме, че не е целесъобразно да прилагаме процедурата „Чистене на точки“ („Cleaning of Points“).

След като е изготвил списъка с перспекторите, „Откривател“ трябва да открие кои от тях съвпадат с известни забележителни точки. За целта към списъка List P прилагаме процедурата „Частична идентификация на точки“ („Partial Identification of Points“). При тази процедура „Откривател“ произвежда 6 файла:

1_List_P.php.htm
2_List_K.php.htm
3_List_D.php.htm

4_List_P-X.php.htm
5_Table_P-X.php.htm
6_Table_X-P.php.htm

Към статията са приложени горните шест файла. Първият файл, 1_List_P.php.htm, съдържа списък с точките, които трябва да бъдат идентифицирани. Този списък е разделен на две части, съдържащи се в следващите два файла. Файлът 2_List_K.php.htm („K“ от Kimberling) съдържа точките от List P, които са включени в енциклопедията (Kimberling), а файлът 2_List_D.php.htm („D“ от difference, т.е. разлика на списъци) съдържа останалите точки от 1_List_P.php.htm. Файлът 4_List_P-X.php.htm съдържа списък с теоремите, показващи коя точка от List P с коя точка от (Kimberling) съвпада. Последните два файла съдържат същия списък с теореми, но подредени в таблична форма по два различни начина. Табличното подреждане се прави за удобство на потребителя.

2. Преглед на резултатите

В описаната по-горе процедура „Частична идентификация на точки“ точките се идентифицират, като се сравняват с точките от енциклопедията (Kimberling). Понастоящем това е най-пълната енциклопедия със забележителни точки на триъгълника. Енциклопедията е създадена през 2000 г. и оттогава постоянно се попълва с нови забележителни точки. Към средата на 2013 г. в енциклопедията има описани 5549 забележителни точки на триъгълника. Ако една забележителна точка не е включена в тази енциклопедия, може да се предполага, че тя не е изучена в литературата.

Като първо приложение на получените резултати можем да напишем някои класификационни теореми, като следната:

Теорема 2. Списъкът List P съдържа всички перспектори между ΔABC и триъгълници от множеството List 3.

Горната теорема означава, че ако един триъгълник не е включен в списъка List P, то той не е перспективен с ΔABC. Следователно можем да си спестим изучаването на съответната перспективност.

Можем да напишем и класификационна теорема от вида

Теорема 3. Списъкът List K съдържа всички точки от списъка List P, които съвпадат с някоя от точките в (Kimberling).

Следователно можем да си спестим търсенето на други точка от List P, които съвпадат с някоя точка от (Kimberling). Класификационните теореми показват разликата в работата на „Откривател“ и човешката изследователска дейност. При хората изследванията до голяма степен са хаотични. Откриват се отделни резултати, а сходните се подминават. Разликата може да се илюстрира и в случая на енциклопедията на Kimberling. В нея на различни места са включени няколко теореми от списъка List P-X. Тези теореми са открити от изследователи (според енциклопедията), но всъщност са преоткрити, тъй като някои от тях са открити от прототипа на „Откривател“ и са публикувани през 2006 г. и 2007 г. Сходни теореми от списъка List P-X обаче не са включени в енциклопедията, макар че са не по-малко значими. Систематичността в работата на „Откривател“ означава, че тази компютърна програма е подходяща за изготвянето на енциклопедия с резултати от Евклидовата геометрия. Понастоящем енциклопедията (Kimberling) частично изпълнява функциите на енциклопедия. Тя обаче описва около 5500 забележителни точки, докато базата данни на „Откривател“, която е в процес на разработване, ще съдържа около 5 милиона забележителни точки. Освен това енциклопедията (Kimberling) се ограничава с описанието на забележителни точки на триъгълника, докато енциклопедията на „Откривател“ ще включва и други забележителни обекти на триъгълника – забележителни триъгълници, окръжности, триади от окръжности и т.н. Енциклопедията на „Откривател“ ще включва и построения с линийка и пергел. Авторите са надяват, че една част от нея ще бъде изготвена със сътрудничеството на ученци, учители и студенти.

Да погледнем някои от теоремите, включени в списък List P-X. По-удобно е да ползваме обаче Table X-P, където същите теореми са дадени в таблична форма. Таблицата, ред 73, съдържа изходната за темата теорема, посочена по-горе като теорема 1, но съдържа и редица други теореми. Предоставяме на читателя да намери теореми, включени в Table X-P, но липсващи в (Kimberling). Например за ортоцентъра на ΔABC в (Kimberling) няма теорема от Table X-P, докато в Table X-P за тази забележителна точка има 23 теореми.

В Table X-P, ред 131, намираме следната теорема:

Теорема 4. (Danneels, 2004) The Congruent Isoscelizers Point is the Perspector of the Intouch Triangle of the Intouch Triangle.

Теорема 4 е една популярна теорема, открита от Eric Danneels. Тя дава прост начин как може да се построи с линийка и пергел точката Congruent Isoscelizers Point. Ще припомним, че за тази забележителна точка се споменава в статията (Гроздев & Деков, 2013b). Възниква въпросът дали можем да намерим подобна характеризация (роля) и за втората забележителна точка на Yff, а именно точката Yff Center of Congruence, която е точка X(174) в (Kimberling). Преглеждайки Table X-P, виждаме шест роли на точката Yff Center of Congruence. Ролята, дадена в ред 135 на Table X-P и включена в (Kimberling, X(174)), а ролята, която е в ред 134 на Table X-P, е дадена в теорема 6 от (Гроздев & Деков, 2013b). Авторите насърчават читателя да направи оценка на сложността на построенията с линийка и пергел на шестте подхода, изложени в шестте теореми за Yff Center of Congruence, съдържащи се в Table X-P**,** редове 134 – 139. За преценка на сложността на построенията може да бъде използван подходът, изложен в (Лазаров & Табов, 1988), (Лазаров & Табов, 1990).

Списъкът List D съдържа точки, които не са включени в енциклопедията (Kimberling). Ако една точка не е включена в енциклопедията, за нея няма дадени резултати в енциклопедията. Поради тази причина можем да считаме, че вероятно резултатите, изложени в List D, са нови. Новите точки, съдържащи се в List D („нови“ в смисъл, че не са включени в енциклопедията на Кимбърлин), могат да бъдат обект на изследване с „Откривател“. Тук няма да правим подобно изследване, тъй като базата данни на „Откривател“ е в процес на разработване. Ще отбележим, че всеки ред от List D може да бъде преформулиран като теорема, утвърждаваща съществуването на перспективни триъгълници – триъгълникът *ABC* и триъгълник от List 3.

Възможно е някои от точките, включени в List D, да съвпадат. List D съдържа 100 точки. Ако има съвпадащи точки, това означава, че броят на „новите“ забележителни точки, включени в List D, е по-малък от 100. Ако искаме да проверим колко е броят на „новите“ забележителни точки, включени в List D, можем да приложим процедурата „Чистене на точки“ към List D. Получаваме, че има 99 различни точки. Това означава, че две от точките, включени в List D, съвпадат. Ако искаме да разберем кои са те, можем да приложим процедура, която разбива множеството List D на класове на еквивалентност и всеки клас съдържа съвпадащи точки и само такива. При тази процедура „Откривател“ извежда като изход класовете на еквивалентност, подредени в низходящ ред по броя на елементите в клас на еквивалентност.

Задача за читателя. Кои две от точките, включени в List D, съвпадат?

Отговор. Следните две точки съвпадат:

1. Prespector of Triangle ABC and the Orthic Triangle of the Honsberger Triangle.
2. Prespector of Triangle ABC and the Tangential Triangle of the Honsberger Triangle.

Ще припомним определението на триъгълника на Хонсбергер (Honsberger Triangle). Нека G е медицентърът на ΔABC и нека O_1, O_2 и O_3 са центровете на окръжностите, описани съответно около ΔGBC, ΔGCA и ΔGAB. Тогава $\Delta O_1O_2O_3$ е *триъгълникът на Хонсбергер.*

В горния пример за разработване на тема сме избрали триъгълниците от List 1 като изходно множество от триъгълници. Можем да изберем друго изходно множество с помощта на базата данни на „Откривател”. Самата база данни е в процес на разработка. Понастоящем тя съдържа над 100 000 триъгълника.

По-горе изложихме подход за разработване на тема, отнасяща се до Евклидовата геометрия. Евклидовата геометрия е богата на теореми и теми, които могат да бъдат изследвани с „Откривател“. Авторите разработват методология за използване на „Откривател“ от ученици, учители и студенти, която ще бъде изложена в други статии. Понастоящем в областта на Евклидовата геометрия се водят интензивни изследвания по света, така че методологията ще може да бъде ползвана и от изследователи.

3. От теореми към задачи

В горния пример на разработена тема получихме 283 теореми, утвърждаващи съществуването на перспективност между триъгълници (в List P), а в някои случаи даващи и характеризация на перспектора (в List K). Ще отбележим, че ако един триъгълник е включен в List 3, но не е включен в List P, това означава че триъгълникът *ABC* и въпросният триъгълник не са перспективни. Това също е теорема, представляваща интерес. Ако включим и теоремите от този вид, общият им брой става 1720. Авторите предполагат, че някои от тези теореми са нови.

Читателят може да изготви доказателства на някои от включените в статията теореми. За целта може да бъде използван подходът с барицентрични координати, изложен в (Гроздев & Ненков 2012a), (Гроздев & Ненков 2012b). Възможно е да бъде използван и подходът с декартови координати, изложен в (Станилов 2004) (този подход е особено полезен при съставянето на задачи за упражнения по аналитична геометрия във висшите училища). Трета възможност е свързана с подхода на синтетичната геометрия, който се изучава в училището.

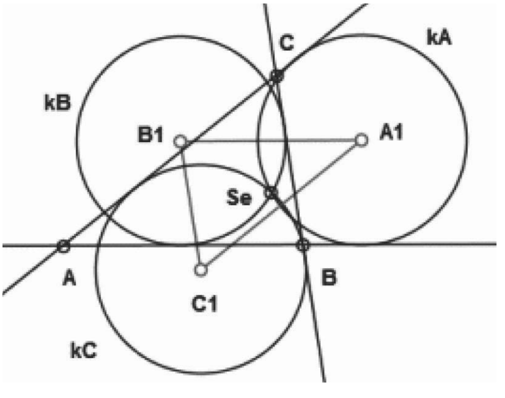
За да използваме споменатите теореми в учебния процес, трябва да ги преформулираме така, че да участват само понятия, изучавани в средното училище. В статията (Гроздев & Деков, 2013b) са дадени примери за преформулиране на теореми като задачи. Последното може да се осъществи по различни начини в зависимост от това, какво приемаме за дадено и какво търсим. Да обърнем внимание, че геометричните обекти често имат еквивалентни описания и можем да изберем едно от тях. По-долу ще дадем още два примера за преформулиране.

Добре известно е, че за всяка точка от вътрешността на даден ъгъл има две окръжности, които минават през точката и се допират до раменете на ъгъла. Построение с линийка и пергел на тези две окръжности е дадено например в (Петров & Ганчев, 1966), стр.160 – 161.

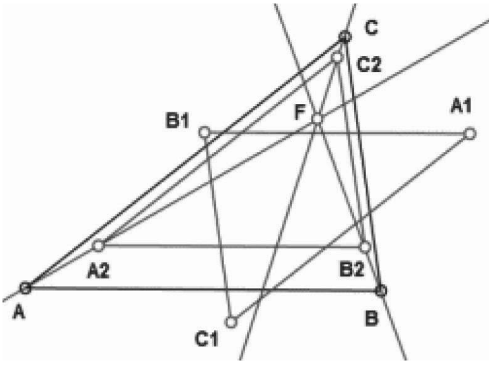
Теорема A1. The Feuerbach Point is the Homothetic Center and Perspector of Triangle ABC and the Johnson Triangle of the Outer Yff Triangle.

Задача 1. Даден е ΔABC. Докажете, че вписаната в ΔABC окръжност и описаната около медиалния триъгълник на ΔABC окръжност се допират. Да означим с F допирната точка на тези две окръжности. Нека Se е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC, а kA (A_1, r_A) е окръжността, която минава през Se и се допира до раменете на $\angle BAC$ така, че отсечката AA_1 е по-дълга от отсечката ASe. Аналогично определяме окръжностите kB (B_1, r_B) и kC (C_1, r_C). (Фиг.1). Нека H е ортоцентърът на $\Delta A_1B_1C_1$, а cA (A_2, r_{cA}) е окръжността през точките H, B_1 и C_1. Аналогично определяме окръжностите cB (B_2, r_{cB}) и cC (C_2, r_{cC}). Докажете, че ΔABC и $\Delta A_2B_2C_2$ са хомотетични с център на хомотетия F. Докажете, че правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в точката F. (Фиг.2).

Точка F в горната теорема е известната точка на Фойербах и се означава с X(11) в (Kimberling). Окръжността, описана около медиалния триъгълник на ΔABC, е известната окръжност на Ойлер. Трите окръжности kA, kB и kC се наричат външни окръжности на Yff, а $\Delta A_1B_1C_1$ се нарича външен триъгълник на Yff на ΔABC. Известно е, че външните окръжности на Yff са конгруентни. Окръжностите cA, cB и cC, отнесени към произволен триъгълник, се наричат окръжности на Johnson и също са конгруентни. Тригълникът $A_2 B_2 C_2$, отнесен към произволен триъгълник, се нарича триъгълник на Johnson.



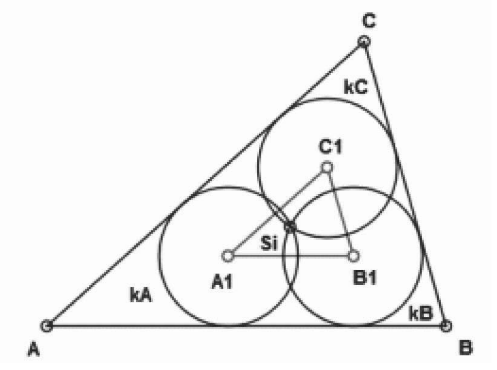
Фиг. 1



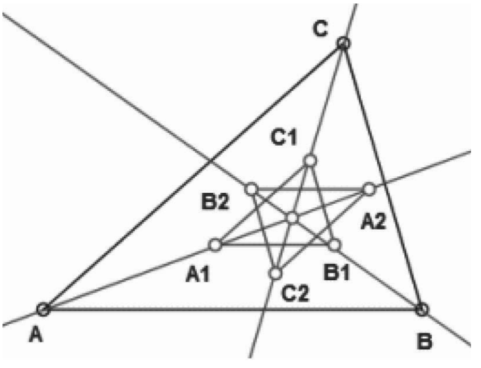
Фиг. 2

Теорема А2. The Feuerbach Perspector is the Homothetic Center and Perspector of Triangle ABC and the Johnson Triangle of the Inner Yff Triangle

Задача 2. Даден е ΔABC. Докажете, че окръжността k, описана около медиалния триъгълник на ΔABC, се допира външно към външно вписаните окръжности на ΔABC. Да означим с F_1, F_2 и F_3 допирните точки на k съответно с външно вписаните окръжности, лежащи в ъглите $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$. Докажете, че правите AF_1, BF_2 и CF_3 се пресичат в една точка. Да означим тази точка с Fe. Нека Si е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC, а kA (A_1, r_A) е окръжността, която минава през Si и се допира до раменете на $\angle BAC$ така, че отсечката AA_1 е по-къса от отсечката ASi. Аналогично определяме окръжностите kB (B_1, r_B) и kC (C_1, r_C). (Фиг.3). Нека H е ортоцентърът на $\Delta A_1B_1C_1$, а cA (A_2, r_{cA}) е окръжността през точките H, B_1 и C_1. Аналогично определяме окръжностите cB (B_2, r_{cB}) и cC (C_2, r_{cC}). Докажете, че ΔABC и $\Delta A_2B_2C_2$са хомотетични с център на хомотетия Fe. Докажете, че правите AA_2, BB_2 и CC_2 се пресичат в точката Fe. (Фиг.4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Точка Fe в горната теорема е известна като перспектор на Фойербах и се означава с X(12) в (Kimberling). Трите окръжности kA, kB и kC се наричат вътрешни окръжности на Yff, а $\Delta A_1B_1C_1$ се нарича вътрешен триъгълник на Yff на ΔABC. Известно е, че вътрешните окръжности на Yff са конгруентни.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът topics.zip, който съдържа цитираните в тази статия файловете. Той може да бъде изтеглен от уеб страницата на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Weisstein, E. W. MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/
2. Kimberling, C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
3. Danneels, E. (2004). A Simple Construction of the Congruent Isoscelizers Point, *Forum Geometricorum*, 4, 69 – 71. http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200409.pdf

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.
Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия, *Математика и информатика*, т. 56, 1, 49 – 59.
Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“, *Математика и информатика*, т. 56, 5, 444 – 455.
Петров, К. & Ганчев, И. (1966). *Сборник от задачи за построение по геометрия*. София: Народна просвета.
Лазаров, Б. & Табов, Й. (1988). Оценки на алгоритми за геометрични построения, *Обучението по математика и информатика*, № 6, 1 – 4.
Табов, Й. & Лазаров, Б. (1990). *Геометрични построения*. София: Народна просвета.
Станилов, Г. (2004). Компютърни методи в геометрията на триъгълника, *Proc.of the 33. Spring Conf. of the Union of Bulg. Mathematicians.*

COMPUTER-GENERATED MATHEMATICS: ELABORATION OF A TOPIC FROM EUCLIDEAN GEOMETRY

Abstract. In the paper an elaboration of a topic from Euclidean Geometry by the computer program ‘Discoverer’ is shown. A theorem or a group of similar theorems are used as starting points. The paper presents 283 theorems which are discovered by the computer program ‘Discoverer’. The authors presume that some of them are new. The theorems produced by ‘Discoverer’ could be reformulated as problems, in more than one way in the general case.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc in Pedagogy**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.**
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com