Educational Research
Научно–методически статии

МАШИНЕН ПОДХОД КЪМ ЕВКЛИДОВАТА ГЕОМЕТРИЯ: ТРИЪГЪЛНИЦИ НА ОЙЛЕР, ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ОЙЛЕР И ТРАНСФОРМАЦИИ НА ОЙЛЕР

Сава Гроздев, Деко Деков
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Авторите представят резултати за произведения на Ойлер и трансформации на Ойлер. Резултатите са открити от компютърната програма „Откривател“.
Keywords: computer-generated mathematics, Euler triangle, Euler product, Euler transform, Euclidean geometry, Discoverer

Авторите предполагат, че читателят е запознат с техни предишни статии за компютърната програма „Откривател“. Виж (Гроздев & Деков, 2013a,b, 2014 a-e). Теоремите в тази статия са открити от компютърната програма „Откривател“. С барицентричните координати читателят може да се запознае по (Гроздев & Ненков, 2012a,b). Дефиниции на използваните понятия са дадени в (Weisstein), (Grozdev & Dekov, 2014f).

1. Триъгълници на Ойлер

Нека е даден $\triangle ABC$ и нека *P* е точка в равнината на този триъгълник. Нека *Ea*, *Eb* и *Ec* са средите съответно на отсечките *AP*, *BP* и *CP*. Казваме, че $\triangle EaEbEc$ е *триъгълник на Ойлер на точката P*. В частност, ако точката *P* е ортоцентърът на $\triangle ABC$, получаваме класическия триъгълник на Ойлер.

Теорема 1. For any points P and Q, the Euler Triangle of Point P and the Triangle of Reflections of Point Q in the Vertices of Triangle ABC are perspective. The Perspector is the Point which divides internally the directed segment PQ in ratio 1 : 2.

Теорема 2. For any point P, the Euler Triangle of Point P and the Medial Triangle are perspective. The Perspector is the Complement of the Complement of Point P.

Теорема 3. For any point P, the Euler Triangle of Point P and the Half-Medial Triangle are perspective. The Perspector is the Complement of Point P.

Теорема 4. For any point P, the Euler Triangle of Point P is perspective with the following triangles: The Antimedial Triangle, the Inner Grebe Triangle, the Outer Grebe Triangle, the Johnson Triangle, the Inner Yff Triangle and the Outer Yff Triangle.

Доказателства на тези теореми могат да бъдат изготвени с използване на барицентрични координати. Барицентричните координати са удобни с това, че в редица случаи са относително прости алгебрични изрази. Барицентричните координати на точки и други геометрични обекти в геометрията на триъгълника са пресметнати и могат да бъдат наготово ползвани, виж например (Kimberling) и (Weisstein). В някои случаи в литературата барицентричните координати са дадени с тригонометрични изрази, които обаче винаги могат да бъдат преобразувани в алгебрични изрази. Ако използваме компютърна програма за символни преобразувания, като Мейпъл (Maple), ще сведем доказателството до писане на команди на Мейпъл. Това ще позволи да концентрираме вниманието си върху алгоритъма на задачата. Алгебричният подход с координати води до прости алгоритми, които правят изследванията лесно и бързо осъществими. Ще отбележим, че в последно време подходът с използване на барицентрични координати за решаване на геометрични задачи все по-широко се използва в задачите за олимпиади. Виж например (Schindler & Chen, 2012).

Доказателство на теорема 1. Нека е даден $\triangle ABC$. Върховете на триъгълника на Ойлер $EaEbEc$ на точката $P=(u,v,w)$ имат следните барицентрични координати:

$Ea=(2u+v+w,v,w)$, $Eb=(u,u+2v+w,w)$, $Ec=(u,v,u+v+2w)$.

Тези координати лесно могат да бъдат намерени като среди на отсечки. Точката *Ea* е средата на отсечката *AP*, където $A=(1,0,0)$. Аналогично намираме координатите на втория и третия връх на триъгълника на Ойлер на точката *P*. Изводът на координатите е даден във файл на Мейпъл, приложен към тази статия. Барицентричните координати на върховете на триъгълника $\triangle VaVbVc$, които са симетричните точки на точка $Q=(p,q,r)$ относно върховете на $\triangle ABC$, могат да бъдат намерени като симетрични точки на точки относно съответните точки. Изводът на координатите е даден в приложен файл на Мейпъл. Тези барицентрични координати са, както следва:

$Va=(p+2q+2r,-q,-r)$, $Vb=(-p,2p+q+2r,-r)$, $Vc=(-p,-q,2p+2q+r)$

Нека $P=(u,v,w)$ и $Q=(p,q,r)$. Барицентричните координати на точката *R*, която дели вътрешно насочената отсечка *PQ* в отношение 1 : 2, намираме, като използваме формулата за делене на отсечка в дадено отношение. Първата барицентрична координата на точка *R* е равна на $3up+2u(q+r)+p(v+w)$. Изводът на координатите е даден в приложен файл на Мейпъл. Ще отбележим, че втората барицентрична координата на точката *R* може да бъде получена от първата координата чрез прилагане на субституцията: $u\mapsto v,\ v\mapsto w,\ w\mapsto u,\ p\mapsto q,\ q\mapsto r,\ r\mapsto p$, а третата барицентрична координата можем да получим, като приложим същата субституция към втората барицентрична координата.

След като знаем барицентричните координати, дадени по-горе, остава да проверим, че точката R лежи върху правите $EaVa$, $EbVb$ и $EcVc$, което означава, че тази точка е пресечна точка на тези прави, тоест, перспектор на $\triangle EaEbEc$ и $\triangle VaVbVc$. Проверката извършваме, като използваме формулата за три точки, които лежат върху една права. Тази формула е дадена например в (Гроздев & Ненков 2012a,b). Файлът с пресмятания на Мейпъл е приложен към тази статия. Теорема 1 е доказана.

Теореми 2 и 3 доказваме, като използваме същия подход, както при доказателството на теорема 1. В теорема 3 участва "Half-Median Triangle", тоест триъгълникът *JaJbJc*, върхове на който са средите на медианите на ΔABC. Барицентричните координати на върховете на този триъгълник намираме с използване на формулата за среда на отсечка. Тези барицентрични координати са следните: $Ja=(2,1,1)$, $Jb=(1,2,1)$, $Jc=(1,1,2)$. Файлове на Мейпъл с доказателствата са приложени. Доказателството на първата част на теорема 4 е дадено в приложен файл на Мейпъл, а остатъка от теоремата оставяме на читателя като полезно упражнение.

2. Произведения и трансформации на Ойлер

От теорема 1 следва, че на всеки две точки P и Q е съпоставена точка Наричаме тази точка *произведение на Ойлер на точките* P и Q. С компютърната програма „Откривател" лесно можем да съставим примери на произведения на Ойлер. Нека да вземем списъка с точки, даден във файла "1_List_P.php.htm", който е в папката "1 Euler Products". Този списък съдържа 90 произведения на Ойлер на някои основни точки. Компютърната програма „Откривател" разделя този списък на два списъка – списък на точките, които са включени в енциклопедията (Kimberling), и списък с точки, които не са включени в тази енциклопедия. Виждаме, че първият списък съдържа 4 точки, а вторият списък съдържа 86 точки. Всеки ред от таблицата, дадена във файла "6_Table_X-P.php.htm", намиращ се в посочената папка, може да бъде презаписан като теорема. Например първият ред може да бъде записан както следва:

Теорема 5. The Centroid is the Euler Product of the Spieker Center and the Incenter.

Ще отбележим, че в сила на теорема 1 по-горе, за да докажем теорема 5, е достатъчно да отбележим, че медицентърът дели насочената отсечка от центъра на Спийкър (Spieker center) към центъра на вписаната в ΔABC окръжност в отношение 1:2. Това означава, че центърът на Спийкър е допълнение ("Complement") на центъра на вписаната в ΔABC окръжност, което е известен факт. Виж например (Weisstein, Complement). Разбира се, този факт лесно може да бъде доказан с формулата за делене на отсечка в дадено отношение.

В последно време в геометрията на триъгълника все по-важно място заемат трансформациите на точки, тоест изображенията, които на всяка забележителна точка на триъгълника съпоставят по определено правило забележителна точка на триъгълника. Много от забележителните точки се дефинират като образи при такива трансформации. Например в (Kimberling) точки с номера от 1601 до 1634 са дефинирани като образи на трансформация, наречена Steinbart transform.

Теореми 2 до 4 дефинират общо осем трансформации на забележителни точки на триъгълника, които наричаме *трансформации на Ойлер*. Първата трансформация на Ойлер на всяка точка P съпоставя перспектора на триъгълника на Ойлер на точката P и медиалния триъгълник. Аналогично дефинираме и останалите трансформации. Примери към тези трансформации могат да бъдат произведени, както следва. Стартираме, като съставяме списък със забележителни точки на триъгълника. В конкретния случай вземаме списъка със 110 забележителни точки, който е даден във файла “110 Starting Points.htm”, който е в папката “2 Euler Transforms”. За всяка от тези 110 точки „Откривател“ намира образа на точката при всяка от осемте трансформации. По този начин получаваме общо 880 точки-образи. От тези точки-образи 844 точки-образи не са включени в (Kimberling). Като прибавим и 86-те точки-образи, описани по-горе, които са произведения на Ойлер, които не са включени в (Kimberling), получаваме общо 930 точки-образи, които не са включени в (Kimberling). Може да считаме, че това са нови забележителни точки на триъгълника. Всъщност новите точки са с пет по-малко, тъй като в списъка на новите 930 точки-образи има пет двойки точки, които съвпадат. Кои двойки точки съвпадат? Това е пример на задача, която е твърде обемиста за решаване от човек, но лесно се решава от компютър. Отговорът на тази задача е даден в приложения файл “points.pdf”.

Всеки ред от таблиците, дадени във файловете “6_Table_X-P.php.htm”, намиращи се в осемте подпапки на папка “2 Euler Transforms”, може да бъде презаписан като теорема. Например третият ред от таблицата във файла “6_Table_X-P.php.htm” в третата подпапка на посочената папка може да бъде записан както следва:

Теорема 6. The Circumcenter is the Perspector of the Euler Triangle of the Orthocenter and the Half-Median Triangle.

Ще отбележим, че в сила на теорема 3 по-горе, за да докажем теорема 6, е достатъчно да отбележим, че центърът на описаната около ΔABC окръжност е допълнение на ортоцентъра на ΔABC, което е известен факт. Виж например (Weisstein, Complement). Ще отбележим, че триъгълникът на Ойлер на ортоцентъра, който участва в горната теорема, е класическият триъгълник на Ойлер.

3. Complement of the Center of the Brocard Circle

Теореми 5 и 6 са твърдения, които идентифицират образа на произведение, съответно трансформация на Ойлер, с точка от базата данни на (Kimberling).

Теореми от този вид могат да служат като допълнителни теореми към известните вече теореми за изучени забележителни точки на триъгълника и като такива, могат да бъдат предложени за допълване на съответните статии на енциклопедии като (Kimberling) и (Weisstein). По-голямата част от произведените от „Откривател“ точки-образи обаче не са включени в (Kimberling). Това не означава, че тези нови точки-образи са по-малко значими, а означава, че може би не са били досега обект на изучаване. Всяка от получените общо 925 нови точки-образи, невключени в (Kimberling), може да бъде обект на допълнително изучаване с „Откривател“. В този параграф ще разгледаме един пример, като ще възложим на „Откривател“ да открие теореми за точката “The Complement of the Center of the Brocard Circle”. Тази точка е една от откритите от „Откривател“ нови 925 точки-образи. От теорема 3 следва:

Следствие 1. The Complement of the Center of the Brocard Circle is the Perspector of the Euler Triangle of the Center of the Brocard Circle and the Half-Medial Triangle.

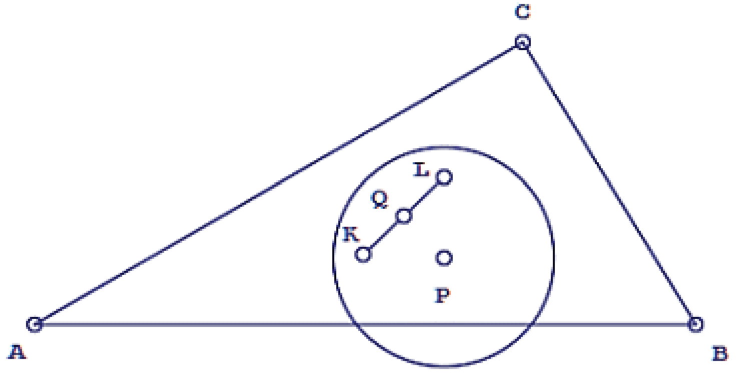
Горното следствие дава две роли на точката – едната роля е “Complement of the Center of the Brocard Circle”, а другата роля е тази, заради която е произведена точката. Освен това „Откривател“ открива още 35 роли на точката. От всички тези роли можем да изберем една, която да считаме за основна, и да я приемем за дефиниция на точката. (Друга концепция, която е по-удобна при машинното производство на голям брой точки, е да считаме всички роли за равноправни и да считаме, че множеството на всички роли дефинира точката). Нека да изберем за дефиниция на разглежданата точка ролята “Complement of the Center of the Brocard Circle”. В приложения файл “Complement of the Center of the Brocard Circle.htm”, който се намира в папка “3 Example”, са дадени три групи теореми за разглежданата точка, открити от „Откривател“. Първата група теореми представя различни роли на точката. „Откривател“ е открил общо 35 роли на точката, освен двете роли, посочени по-горе. Една от тези роли е описана в теорема 7. Втората група теореми описва прави, върху които лежи точката. „Откривател“ е открил 9 различни прави, които съдържат точката. Три от тези прави са начертани на фиг.2. Третата група теореми описва окръжности, върху които лежи точката. „Откривател“ е открил 16 различни окръжности, които съдържат точката. Три от тези окръжности са начертани на фиг.3.

Теоремите по-долу илюстрират някои от произведените от „Откривател“ твърдения.

Теорема 7. The Complement of the Center of the Brocard Circle is the Midpoint of the Nine-Point Center and the Symmedian Point of the Medial Triangle.

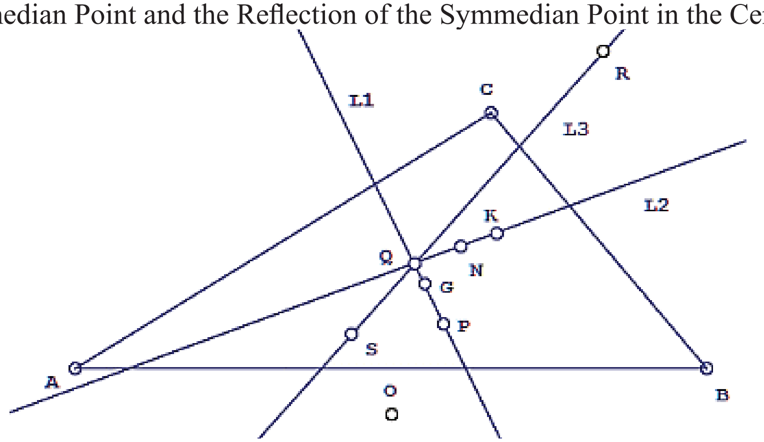
Фигура 1 илюстрира горната теорема. На фиг.1 точка P е центърът на окръжността на Брокар на ΔABC, точка Q е допълнението на точка P относно ΔABC, точка K

е точката на Лемоан на медиалния триъгълник на ΔABC, а точка L е центърът на окръжността на Ойлер на ΔABC. Тогава точка Q е среда на отсечката KL.



Фигура 1

Теорема 8 The Complement of the Center of the Brocard Circle lies on the following lines: The Line through the Centroid and the Tarry Point, Line through the Outer Napoleon Point and the Symmedian Point and the Line through the Reflection of the Circumcenter in the Symmedian Point and the Reflection of the Symmedian Point in the Centroid.



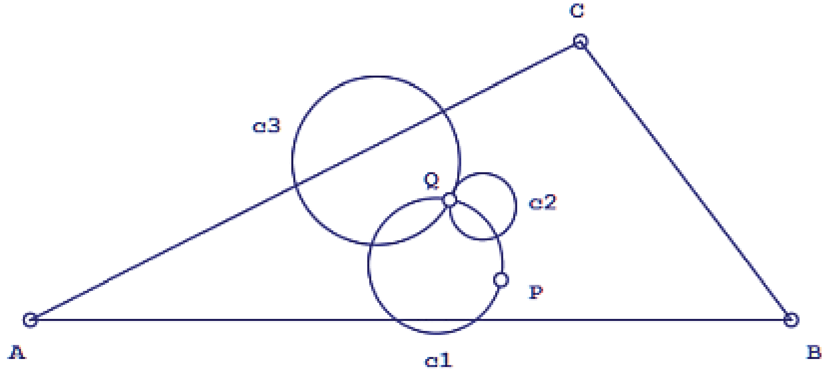
Фигура 2

Фигура 2 илюстрира горната теорема. На фиг. 2 точка P е центърът на окръжността на Брокар на ΔABC, точка Q е допълнението на точка P относно ΔABC, точка G е медицентърът на ΔABC, а $L1$ е правата, определена от медицентъра G и от точката на Тари на ΔABC. (Точката на Тари не е отбелязана на фигурата). Точка

K е точката на Лемоан на ΔABC, точка *N* е външната точка на Наполеон на ΔABC, а *L2* е правата, определена от тези две точки. Точка *O* е центърът на окръжността, описана около ΔABC, точка *R* е симетричната точка на точка *O* относно точката на Лемоан *K*, точка *S* е симетричната точка на точката на Лемоан *K* относно медицентъра *G*, а *L3* е правата, определена от точките *R* и *S*. Тогава точка *Q* е пресечна точка на трите прави *L1*, *L2* и *L3*.

Теорема 9. The Complement of the Center of the Brocard Circle lies on the following circles: The Lester Circle of the First Brocard Triangle, the Lester Circle of the First Brocard Triangle of the Medial Triangle, and the Lester Circle of the Second Brocard Triangle of the Medial Triangle.

Фигура 3 илюстрира горната теорема. На фиг. 3 точка *P* е центърът на окръжността на Брокар на ΔABC, точка *Q* е допълнението на точка *P* относно ΔABC, *c1* е окръжността на Лестер на първия триъгълник на Брокар на ΔABC, *c2* е окръжността на Лестер на първия триъгълник на Брокар на медиалния триъгълник на ΔABC, а *c3* е окръжността на Лестер на втория триъгълник на Брокар на медиалния триъгълник на ΔABC. Тогава точка *Q* е пресечна точка на трите окръжности *c1*, *c2* и с*3*.



Фигура 3

Ще отбележим, че ако искаме да предложим нова точка за включване в (Kimberling) или ако искаме да произведем ефективна система от макроси за Мейпъл, трябва да намерим барицентричните координати на точката. В разглеждания случай това е лесно – барицентричните координати на центъра на окръжността на Брокар са известни, откъдето лесно можем да намерим барицентричните координати на допълнението на тази точка. В (Kimberling, X(182)) барицентричните координати на центъра на окръжността на Брокар са дадени като тригонометрични изрази. С Мейпъл предпочитаме да преобразуваме алгебрични изрази, така че можем да преобразуваме тригонометричните изрази до алгебрични, или да съставим сами барицентричните координати на центъра на окръжността на Брокар, като стартираме с алгебрични изрази. В конкретния случай това е лесно – центърът на окръжността на Брокар е среда на отсечката с краища центърът на описаната около ΔABC окръжност и точката на Лемоан. Стартираме с алгебричните изрази за барицентричните координати на тези две точки, намираме средата на отсечката с краища тези две точки и намираме допълнението на намерената среда на отсечката. Първата барицентрична координата на точката "Complement of the Center of the Brocard Circle" е следната:

$$b^6 + c^6 - 4a^2b^2c^2 - b^4(a^2 + c^2) - c^4(a^2 + b^2),$$

където *a, b* и *c* са дължините на страните на ΔABC, $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$. Към статията е приложен файлът на Мейпъл "Barycentric coordinates.mws", намиращ се в папка "5 Example", която е подпапка на папката "2 Maple", съдържащ пресмятанията на барицентричните координати на разглежданата точка. Ще отбележим, че втората барицентрична координата можем да получим, като към първата барицентрична координата приложим субституцията: $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$, а третата барицентрична координата можем да получим, като приложим същата субституция към втората барицентрична координата.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът Euler.zip, който съдържа файловете, цитирани в тази статия. Файлът Euler.zip може да бъде изтеглен от уеб страницата на книжката на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Kimberling C., Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
2. Weisstein E., MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/
3. Schindler, M. & Chen, E. (2012). Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry, http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary_full.pdf

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед. (ISBN 978-954-779-136-7, 64 стр.).

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед. (ISBN 978-954-779-145-9, 120 стр.).

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия, *Математика и информатика*, № 1, 49 – 59.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма „Откривател", *Математика и информатика*, № 5, 444 – 455.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014a). Компютърно генерирана математика: Разработване на тема от Евклидовата геометрия, *Математика и информатика*, № 1, 34 – 42.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014b). Компютърната програма „Откривател" и компютърно генерираната енциклопедия, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 2, http://www.ddekov.eu/j/

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014c). Изучаване с помощта на компютърната програма „Откривател" на криви от втора степен, описани около даден триъгълник, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014d). Learning by Discoveries, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 1, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014e). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 4, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014f). Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry, http://eg-enc.webege.com/

REFERENCES

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012a). Tri zabelezhitelni tochki varhu medianite na triagalnika. Sofiya: Arhimed. (ISBN 978-954-779-136-7, 64 stranitsi)

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012b). Okolo ortotsentara v ravninata i prostranstvoto. Sofiya: Arhimed. (ISBN 978-954-779-145-9, 120 stranitsi)

Grozdev, S. & Dekov, D. (2013a). Po patya kam parvata kompyutarno-generirana entsiklopediya, Matematika i informatika, № 1, 49-59.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2013b). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa "Otkrivatel", Matematika i informatika, № 5, 444-455.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014a). Kompyutarno-generirana matematika: Razrabotvane na tema ot Evklidovata geometriya, Matematika i informatika, № 1, 34-42.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014b). Kompyutarnata programa "Otkrivatel" i kompyutarno-generiranata entsiklopediya, Journal of Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 2, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014c). Izuchavane s pomoshtta na kompyutarnata programa "Otkrivatel" na krivi ot vtora stepen, opisani okolo daden triagalnik, Journal of

Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014d). Learning by Discoveries, Journal of Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 1, http://www.ddekov.eu/j/
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014e). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola, Journal of Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 4, http://www.ddekov.eu/j/
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014f). Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry, http://eg-enc.webege.com/

MACHINE APPROACH TO EUCLIDEAN GEOMETRY: EULER TRIANGLES, EULER PRODUCTS AND EULER TRANSFORMS

Abstract. The authors present some results concerning Euler products and Euler transforms. The results are discovered by the computer program "Discoverer".

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.**
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com