Educational Technologies
Образователни технологии

КОМПЮТЪРНО ГЕНЕРИРАНА МАТЕМАТИКА: БЕЛЕЖКА ЗА ТРИЪГЪЛНИКА НА ХАИМОВ

Сава Гроздев, Деко Деков
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. В тази бележка авторите дават някои резултати, отнасящи се до триъгълника на Хаимов. Резултатите са получени от компютърната програма „Откривател“.

Keywords: computer-generated mathematics, Euclidean geometry, “Discoverer”, Haimov triangle

В книжка 4 от 2013 г. на списание „Математика и информатика“ в рубриката „Конкурсни задачи на броя“, е дадена следната задача от Хаим Хаимов от Варна:

Задача. Вписаната в ΔABC окръжност се допира до страните BC, CA и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1. Нека C_2 е втората пресечна точка на описаните около ΔA_1B_1C и ΔABC окръжности, а точките A_2 и B_2 се получават аналогично по отношение съответно на върховете A и B. Да се докаже, че правите A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в една точка.

Триъгълника $\Delta A_2B_2C_2$ ще наричаме *триъгълник на Хаимов,* на името на Хаим Хаимов, описал този триъгълник. В тази бележка ще дадем някои резултати, отнасящи се до триъгълника на Хаимов и получени от компютърната програма „Откривател“. Авторите предполагат, че читателят е запознат с предишни статии, посветени на компютърната програма „Откривател“, виж (Гроздев & Деков, 2013a,b; 2014a-e).

Първият въпрос, който може да бъде поставен при едно изследване на триъгълник от вида на $\Delta A_2B_2C_2$, описан като конструкция, е следният: съвпада ли този триъгълник с някой от известните и описани в литературата триъгълници? За отговор на този въпрос може да бъде използвана компютърната програма „Откриватeл“. Компютърната програма сравнява триъгълника $\Delta A_2B_2C_2$ с триъгълниците от базата данни на програмата. Понастоящем базата данни на „Откривател“ е в процес на попълване, а и след приключването на първото издание на компютърната програма попълването на базата данни трябва да продължи, тъй като в литературата се появяват нови резултати. Процедурата по сравняване на геометричен обект с обектите от същия вид от базата данни на „Откривател“ наричаме *идентификация*.

В случая с триъгълника на Хаимов получаваме следния резултат: триъгълникът на Хаимов съвпада с триъгълник, известен с името "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt".

Виждаме, че триъгълникът на Хаимов има поне две роли. Едната е тази, описана от Хаимов, а втората е дадената по-горе, именно ролята "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt". Даден обект може да има много роли, понякога стотици. Една от тях би могла да бъде избрана за дефиниция. В случая с триъгълника на Хаимов приемаме за дефиниция ролята "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt". Това означава, че при пресмятанията „Откривател" ще използва тази дефиниция. Избираме тази роля за дефиниция, тъй като барицентричните координати на върховете на триъгълника "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt" са пресметнати и са налични в литературата. Това помага да бъдат ползвани наготово.

Задачата на Хаимов, цитирана по-горе, може да бъде преформулирана в терминологията на „Откривател" като задача за доказване перспективността на два триъгълника, а именно – триъгълника на Хаимов $\Delta A_2B_2C_2$ и триъгълника $\Delta A_1B_1C_1$, именуван от „Откривател" като "Intouch Triangle". Пресечната точка на правите, които минават през съответните върхове на триъгълниците, в случая правите A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, се нарича перспектор. Може да бъде поставен въпросът дали триъгълникът "Intouch Triangle" е единственият, който е перспективен с триъгълника на Хаимов, или има и други такива триъгълници. Тази задача лесно може да бъде решена с „Откривател". Като използваме част от базата данни на „Откривател" с триъгълници, компютърната програма намира общо 26 триъгълника, които са перспективни с триъгълника на Хаимов. На тези 26 перспективни двойки триъгълници съответстват 26 перспектора, като някои перспектори може да съвпадат. Нека да приложим към получените 26 перспектора процедурата за частична идентификация на точки, описана в статията (Гроздев & Деков, 2014b). Получаваме 6 файла в HTML формат съгласно стандарта за частична идентификация на точки. Тези файлове са приложени към настоящата бележка.

Да разгледаме получените от „Откривател" резултати. Виждаме, че от намерените 26 перспектора 13 са включени в базата данни на Кимбърлин (Kimberling), а останалите 13 не фигурират в тази база данни, което означава, че са геометрични обекти, за които досега може би няма публикувано изследване в литературата. Във файла 4_List_P-X.php.htm са дадени 13 теореми, подредени в списък. Втората от тези теореми гласи:

Теорема 1. The Prespector of the Haimov Triangle and the Intouch Triangle is the X(56).

От тази теорема се вижда, че пресечната точка на правите A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 в задачата на Хаимов е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC. Тази точка е именувана X(56) в енциклопедията на Кимбърлин (Kimberling).

Доказателство. Ще ползваме барицентрични координати. Барицентричните координати на точката на Жергон са известни, откъдето следва, че са известни върховете на триъгълника на Чева на точката на Жергон, а именно, триъгълникът Intouch Triangle = $\Delta A_1B_1C_1$. За триъгълника на Хаимов = $\Delta A_2B_2C_2$ използваме ролята му "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt", при която барицентричните координати на върховете на триъгълника са известни. Ще отбележим, че използваме барицентричните координати на триъгълника Circum-Anticevian Triangle съгласно (Douillet, 2012), стр.71. Известни са и барицентричните координати на точката S = X(56). При това положение остава само да покажем, че трите точки A_1, A_2 и S лежат върху една права, точките B_1, B_2 и S също лежат върху една права, както и точките C_1, C_2 и S. Условието за три точки, зададени с техните барицентрични координати, да лежат на една права, е дадено например на стр. 9 в (Гроздев & Ненков, 2012a) и на стр. 25 в (Гроздев & Ненков, 2012b). Тъй като точка S лежи и върху трите прави, тя е пресечната точка на тези прави. Използваме програмата за компютърна алгебра Maple, за да си спестим алгебричните преобразувания, като ги заменим с писане на команди. Файлът на Maple с доказателството на теорема 1 е приложен към тази статия.

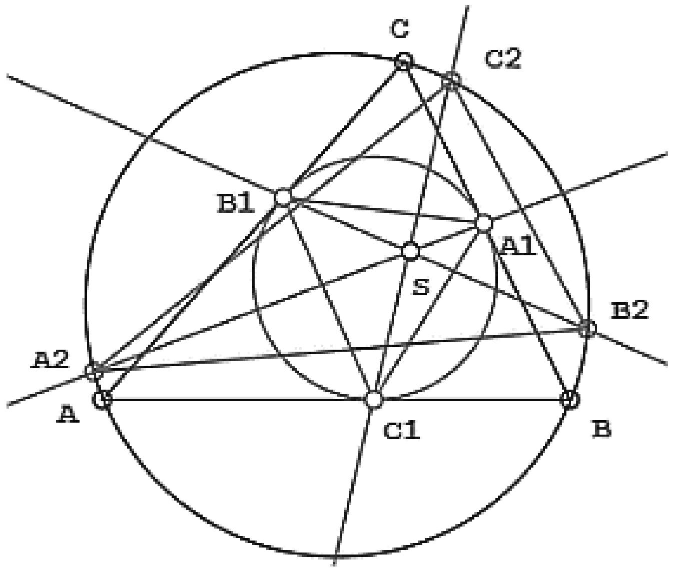
Описанието на триъгълника на Хаимов, дадено от Хаимов, може да послужи триъгълникът да бъде построен с линийка и пергел. Същото важи и за описанието, дадено с ролята "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt". Получените от „Откривател" резултати по частичната идентификация на перспекторите позволяват да бъдат намерени и други начини за построяването с линийка и пергел на триъгълника на Хаимов.

Триъгълникът на Хаимов може да бъде построен като триъгълник, върховете на който са пресечни точки на два геометрични обекта:

1. Описаната около ΔABC окръжност. От ролята "Circum-Anticevian Triangle of the Isogonal Conjugate of the Mittenpunkt" на триъгълника на Хаимов се вижда, че върховете на триъгълника на Хаимов лежат върху тази окръжност.

2. Правите, минаващи през върховете на триъгълник, перспективен на триъгълника на Хаимов, и през перспектора на триъгълниците.

С горния метод за всеки триъгълник, който е перспективен с триъгълника на Хаимов и за който е известен и перспекторът на триъгълниците, получаваме построение на триъгълника на Хаимов.



Фигура 1

Ще използваме теорема 1. На фиг. 1 точка S е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжности на ΔABC, триъгълникът $\Delta A_1B_1C_1$ има за върхове допирните точки на вписаната в ΔABC окръжност и страните на триъгълника ΔABC, а $\Delta A_2B_2C_2$ е триъгълникът на Хаимов. Построяваме върха A_2 като пресечна точка на описаната около ΔABC окръжност и правата SA_1. Аналогично построяваме точките B_2и C_2.

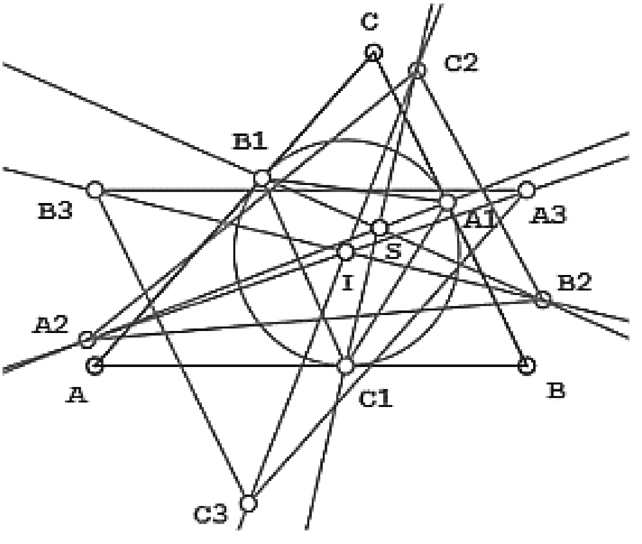
Като използваме останалите теореми от файла 4_List_P-X.php.htm, получаваме още поредица от построения на триъгълника на Хаимов по този метод.

Ако с „Откривател" идентифицираме перспекторите от файла 3_List_D.php.htm, ще можем да получим още построения. Тук ще пропуснем този въпрос.

Задача за читателя. Докажете, че перспекторите с номера от 2 до 12 от файла 3_List_D.php.htm лежат върху правата, минаваща през центровете на вписаната и описаната окръжност на ΔABC.

Ще отбележим още един метод за построяване с линийка и пергел на триъгълника на Хаимов, при който могат да бъдат използвани теоремите от файла 4_List_P-X.php.htm. Нека са известни два триъгълника, перспективни с триъгълника на Хаимов и съответните перспектори. Тогава връх на триъгълника на Хаимов е пресечна точка на следните прави: правата, минаваща през първия перспектор и съответния връх на първия триъгълник, и правата, минаваща през втория перспектор и съответния връх на втория триъгълник. Ще илюстрираме метода, като използваме Теорема 1 и следната теорема:

Теорема 2. (Теорема 6 от файла 4_List_P-X.php.htm). The Prespector of the Haimov Triangle and the Circumcevian Triangle of the Circumcenter is the X(1).



Фигура 2

В горната теорема X(1) и Circumcenter са съответно центровете на вписаната и описаната окръжности на ΔABC, а дефиницията на Circumcevian Triangle е дадена например в (MathWorld, Circumcevian Triangle).

На фиг. 2, също както на фиг. 1, точка S е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC, триъгълникът $\Delta A_1B_1C_1$ има за върхове допирните точки на вписаната в ΔABC окръжност и страните на триъгълника ΔABC, а $\Delta A_2B_2C_2$ е триъгълникът на Хаимов. Освен това на фиг. 2 точка I е центърът на вписаната в ΔABC окръжност, а $\Delta A_3B_3C_3$ е триъгълникът "Circumcevian Triangle of the Circumcenter". Построяването на този триъгълник е елементарно и следва дефиницията, затова оставяме това построение на читателя. Върхът A_2 на триъгълника на Хаимов се построява като пресечна точка на правите SA_1 и IA_3. Аналогично построяваме точките B_2 и C_2.

С горния метод за всяка двойка триъгълници, перспективна с триъгълника на

Хаимов, за които са известни съответните перспектори, получаваме построение на триъгълника на Хаимов.

Задача за читателя. Колко на брой различни построения на триъгълника на Хаимов могат да се получат, ако се използват горните два метода и файла 4_List_P-X.php.htm? С използване на компютърна програма за динамична геометрия постройте с електронни линийка и пергел триъгълника на Хаимов по различните начини. Каква е сложността на построенията, ако използваме метода за оценка, предложен от Лазаров и Табов (Лазаров & Табов, 1988), (Табов & Лазаров, 1990).

Горните два метода са лесно приложими, ако използваме компютърна програма от типа на „Откривател“, която идентифицира перспективните триъгълници и перспекторите. Без такава програма методите са трудни за използване. Ще отбележим, че с „Откривател“ можем лесно да идентифицираме и редица други обекти, свързани с триъгълника на Хаимов, което води до нови методи и нови построения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът “Haimov.zip”, който съдържа файловете, цитирани в тази статия. Файлът “Haimov.zip” може да бъде изтеглен от уеб страницата на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Kimberling C., Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
2. Weisstein E., MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/
3. Douillet, P. L. (2012) Translation of the Kimberling's Glossary into barycentrics, http://www.douillet.info/~douillet/triangle/glossary/glossary.pdf

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия. *Математика и информатика*, т. 56, 1, 49 – 59.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“. *Математика и информатика*, т. 56, 5, 444 – 455.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014a). Компютърно генерирана математика: Разработване на тема от Евклидовата геометрия. *Математика и информатика*, т. 57, 1, 34 – 42.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014b). Компютърната програма „Откривател“ и компютърно генерираната енциклопедия. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 2, http://www.ddekov.eu/j/

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014c). Изучаване с помощта на компютърната програма „Откривател“ на криви от втора степен, описани около даден триъгълник. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014d). Learning through Discoveries. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 1, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014e). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 4, http://www.ddekov.eu/j/

CGEEG, *Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry*, http://eg-enc.webege.com/

Ненков, В. (1995). Теоремата на Брокар и едно уточнение към нея. *Математика и информатика, 5*, 74 – 76.

Ненков, В. (1995). Едно обобщение на теоремата на Droz – Farny и неговият пространствен аналог. *Математика и информатика, 5*, 76 – 79.

Ненков, В. (1995) Едно обобщение на теорема на Брокар. *Математика и информатика, 6*, 75 – 78.

Ненков, В. (2007). Няколко свойства на спрегнатия триъгълник. *Математика и информатика, 6*, 16 – 21.

Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика, 2*, 35 – 42.

Ненков, В. (2010) Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика, 5*, 42 – 61.

Ненков, В. (2011). Коментар върху задачи М+418 и М+420. *Математика плюс, 3*, 42 – 43.

Лазаров, Б. & Табов, Й. (1988). Оценки на алгоритми за геометрични построения, *Обучението по математика и информатика*, № 6, 1 – 4.

Табов, Й. & Лазаров, Б. (1990). *Геометрични построения*, София: Народна просвета.

REFERENCES:

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012a). *Tri zabelezhitelni tochki varhu medianite na triagalnika.* Sofiya: Arhimed.

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012b). *Okolo ortotsentara v ravninata i prostranstvoto.* Sofiya: Arhimed.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2013a). Po patya kam parvata kompyutarno-generirana entsiklopediya, *Matematika i informatika*, t. 56, 1, 49 – 59.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2013b). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa "Otkrivatel", *Matematika i informatika*, t. 56, 5, 444 – 455.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014a). Kompyutarno-generirana matematika: Razrabotvane na tema ot Evklidovata geometriya, *Matematika i informatika*, t. 57, 1, 34 – 42.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014b). Kompyutarnata programa "Otkrivatel" i kompyutarnogeneriranata entsiklopediya, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 2, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014c). Izuchavane s pomoshtta na kompyutarnata programa "Otkrivatel" na krivi ot vtora stepen, opisani okolo daden triagalnik, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014d). Learning through Discoveries, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 1, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014e). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 4, http://www.ddekov.eu/j/

CGEEG, *Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry*, http://eg-enc.webege.com/

Nenkov, V. (1995). Teoremata na Brokar i edno utochnenie kam neya. *Matematika i informatika*, 5, 74 – 76.

Nenkov, V. (1995). Edno obobshtenie na teoremata na Droz – Farny i negoviyat prostranstven analog. *Matematika i informatika*, 5, 76 – 79.

Nenkov, V. (1995) Edno obobshtenie na teorema na Brokar. *Matematika i informatika*, 6, 75 – 78.

Nenkov, V. (2007). Nyakolko svoystva na spregnatiya triagalnik. *Matematika i informatika*, 6, 16 – 21.

Nenkov, V. (2008). Obobshtenie na teoremata na Foyerbah. *Matematika i informatika*, 2, 35 – 42.

Nenkov, V. (2010) Nyakolko svoystva na Foyerbahovata konfiguratsiya. *Matematika i informatika*, 5, 42 – 61.

Nenkov, V. (2011). Komentar varhu zadachi M+418 i M+420. *Matematika plyus*, 3, 42 – 43. 15
Lazarov, B. & Tabov, Y. (1988). Otsenki na algoritmi za geometrichni postroeniya, *Obuchenieto po matematika i informatika*, № 6, 1 – 4.
Tabov, Y. & Lazarov, B. (1990). *Geometrichni postroeniya*, Sofiya: Narodna prosveta.

COMPUTER-GENERATED MATHEMATICS: A NOTE ON THE HAIMOV TRIANGLE

Abstract. In this note the authors present some results related to the Haimov triangle. The results are generated by the computer program “Discoverer”.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.**
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com